Ueber Kegelschnitte, welche mit einer gegebenen Ellipse in Doppelberührung sind und von denselben hergeleitete Verwandtschaften geometrischer Gebilde.

INAUGURAL-DISSERTATION

zur

Erlangung der Doctorwürde

der

hohen philosophischen Fakultät zu Marburg

vorgelegt von

Heinrich Seipp
aus Frankfurt a. M.

Marburg.
Universitäts-Buchdruckerei. (R. Friedrich).
1883.

Ueber Kegelschnitte, welche mit einer gegebenen Ellipse in Doppelberührung sind und von denselben hergeleitete Verwandtschaften geometrischer Gebilde.

I.

Bekanntlich stellt die Gleichung

$$k \cdot S - L^2 = 0$$

einen Kegelschnitt dar, welcher mit dem Kegelschnitt

$$S = 0$$

in dessen Schnittpunkten mit der Geraden

$$L = 0$$

eine doppelte Berührung hat.

Da die Gleichung dieser gemeinsamen Berührungssehne in der allgemeinen Form $y = mx + n$ zwei Konstanten enthält, so kann man in obiger Gleichung im Ganzen über drei willkührliche Grössen frei verfügen. Der doppelt berührende Kegelschnitt ist also vollständig bestimmt durch das Hinzukommen dreier Bedingungen und teilweise bestimmt durch eine oder zwei Bedingungen.

Im Folgenden ist von solchen einschränkenden Voraussetzungen abgesehen und die Untersuchung nur für solche Kegelschnitte geführt, welche eine Ellipse doppelt berühren. Die Mittelpunktsgleichung der letzteren in rechtwinkeligen Koordinaten sei:

$$(1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad S \equiv b^2 x^2 + a^2 y^2 - a^2 b^2 = 0.$$

Für die Gerade werde in demselben Koordinatensystem die Gleichungsform

$$(2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad L \equiv (y - y_1) - m(x - x_1)$$

gewählt, wo x_1 & y_1 die Koordinaten eines beliebigen endlichen, festen Punktes der Ebene bedeuten. Wir entgehen dadurch der

Einschränkung, dass für veränderliches m und konstantes n der Drehpunkt P_1 der Geraden $L=o$ auf der Y-Axe liegt. (Der umgekehrte Fall: m konstant, $n(y_1 - m x_1)$ variabel, verdient keine besondere Betrachtung).

Mit unseren Annahmen stellt jetzt die Gleichung:

$$(3) \ldots k.(b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2) - \left[(y-y_1) - m(x-x_1)\right]^2 = 0$$

oder

$$(3^\alpha) \ldots (b^2k - m^2)x^2 + (a^2k - 1)y^2 + 2mxy - 2m(y_1 - mx_1).x + 2(y_1 - mx_1)y - \left[a^2b^2k + (y_1 - mx_1)^2\right] = 0$$

sämmtliche Kegelschnitte dar, welche mit der Ellipse in allen durch einen beliebigen Punkt gehenden Sehnen eine Doppelberührung eingehen. Sie können aus einer der beiden Gleichungen abgeleitet werden, indem man zuerst m und dann k alle möglichen Werte von $+\infty$ bis $-\infty$ durchlaufen lässt oder umgekehrt.

Erledigen wir vorweg die Frage nach den Kreisen und gleichseitigen Hyperbeln, welche sich unter allen durch die Gleichungen (3) repräsentierten Kegelschnitten befinden, so sehen wir zunächst, dass solche für die Werte $m=0$ und $m=\infty$ existieren müssen; denn diese lassen das Glied in xy aus Gl. (3^α) verschwinden. Die zugehörigen Geraden haben zu Gleichungen:

$$y - y_1 = 0 \text{ resp: } x - x_1 = 0$$

und die in ihnen doppelt berührenden Kegelschnitte, deren Axen also denen der Ellipse parallel sind, werden dargestellt durch:

$$(4) \ldots b^2k.x^2 + (a^2k - 1)y^2 + 2y_1.y - (a^2b^2k + y_1^2) = o, \text{ resp:}$$

$$(5) \ldots (b^2k - 1)x^2 + a^2.k.y^2 + 2x_1.x - (a^2b^2k + x_1^2) = 0.$$

Es befinden sich darunter Ellipsen, Hyperbeln und je eine (eigentliche) Parabel. (vergl. p. 11). Die Gleichung der Parabel, welche $y - y_1 = o$ zur Berührungssehne hat, geht aus Gl. (4) hervor für $k = \frac{1}{a^2}$ und lautet:

$$(6) \ldots x^2 + 2.\frac{a^2}{b^2}.y_1.y - \frac{a^2}{b^2}.(b^2 + y_1^2) = 0$$

Für die zu $x - x_1 = o$ gehörige Parabel ist in Gl. (5) zu setzen: $k = \frac{1}{b^2}$, womit man:

$$(7) \ldots y^2 + 2 \cdot \frac{b^2}{a^2} \cdot x_1 x - \frac{b^2}{a^2} \cdot (a^2 + x_1^2) = 0$$

erhält. — Wenn nun Gl. (4) einen Kreis darstellen soll, so muss die Bedingung $b^2 k - (a^2 k - 1) = o$ oder $k = \frac{1}{a^2 - b^2} = \frac{1}{c^2}$ erfüllt sein. Damit ergiebt sich die Gleichung des Kreises:

$$(8) \ldots x^2 + y^2 + 2 \cdot \frac{c^2}{b^2} \cdot y_1 \cdot y - \left(a^2 + y_1^2 \cdot \frac{c^2}{b^2} \right) = 0$$

Sie lässt sich, wenn P_1 auf der Ellipse liegt, darstellen wie folgt:

$$(8^\alpha) \ldots x^2 + \left(y + \frac{c^2}{b^2} \cdot y_1 \right)^2 = \frac{b^4 x_1^2 + a^4 \cdot y_1^2}{b^4}$$

Natürlich bedeuten in dieser und den folgenden unter α aufgeführten Gleichungen x_1 & y_1 die Koordinaten irgend eines Ellipsenpunkts.

Für $K = \frac{1}{a^2 + b^2} = \frac{1}{c_1^2}$ repräsentiert Gl. (4) eine gleichseitige Hyperbel. Ihre Gleichung ist:

$$(9) \ldots x^2 - y^2 + 2 \cdot \frac{c_1^2}{b^2} \cdot y_1 \cdot y - \left(a^2 + \frac{c_1^2}{b^2} \cdot y_1^2 \right) = 0$$

oder, wenn P_1 auf der Ellipse angenommen wird:

$$(9^\alpha) \ldots x^2 - \left(y - \frac{c_1^2}{b^2} \cdot y_1 \right)^2 = \frac{b^4 \cdot x_1^2 - a^4 y_1^2}{b^4}.$$

Aus Gl. (5) geht für $k = -\frac{1}{a^2 - b^2} = -\frac{1}{c^2}$ die Kreisgleichung:

$$(10) \ldots x^2 + y^2 - 2 \cdot \frac{c^2}{a^2} \cdot x_1 \cdot x - \left(b^2 - \frac{c^2}{a^2} \cdot x_1^2 \right) = 0$$

oder, wenn P_1 Ellipsenpunkt:

$$(10^\alpha) \ldots \left(x - \frac{c^2}{a^2} \cdot x_1 \right)^2 + y^2 = \frac{a^4 \cdot x_1^2 + b^4 \cdot y_1^2}{a^4}$$

hervor. Gl. (5) stellt endlich eine gleichseitige Hyperbel dar gleichfalls für $k = \frac{1}{c_1^2}$. Ihr kommt die Gleichung zu:

$$(11). \ldots x^2 - y^2 - 2 \cdot \frac{c_1^2}{a^2} \cdot x_1 \cdot x + \left(b^2 + \frac{c_1^2}{a^2} \cdot x_1 \right) = 0$$

oder, wenn P_1 Ellipsenpunkt

$$(11^a) \ldots \left(x - \frac{c_1^2}{a^2} \cdot x_1 \right)^2 - y^2 = \frac{b^4 \cdot x_1^2 - a^4 \cdot y_1^2}{a^4}$$

Diese Ergebnisse enthalten die folgenden Sätze:

Es giebt 2 Kreise, welche die Ellipse in den Schnittpunkten mit der durch P_1 zur X- resp: Y-Axe gezogenen Parallelen doppelt berühren. Ihre Mittelpunkte liegen auf der Y- resp: X-Axe. Andere in einer veränderlichen Sehne durch P_1 doppelt berührende Kreise existieren nicht.

Auch nicht in dem Fall, dass die Sehne zur Tangente an die Ellipse wird; es sei denn, dass sie in einem Scheitel der Kurve tangiere. Dann aber haben wir wieder nur einen speciellen Fall der obigen Kreise*).

Ebenso existieren 2 gleichseitige Hyperbeln, welche in denselben Punkten wie die Kreise mit der Ellipse in Doppelberührung stehen und deren Mittelpunkte ganz die entsprechende Lage haben wie dort. Diese beiden gleichseitigen Hyperbeln sind die einzigen, deren Axen denen der Ellipse parallel sind.

Natürlich lassen sich für jedes den Koordinatenaxen parallele Sehnenpaar zwei Kreise und zwei gleichseitige Hyperbeln von den angegebenen Eigenschaften finden. In dem besonderen Falle der Doppelberührung in den Axen der Ellipse erhält man, wegen $y_1 = 0$ resp: $x_1 = 0$ aus den Gleichungen (8) bis (11) sofort die beiden concentrischen Kreise $x^2 + y^2 = a^2$, $x^2 + y^2 = b^2$ und die zwei conjugierten gleichs: Hyperbeln $x^2 - y^2 = a^2$ und $x^2 - y^2 = -b^2$.

*) cf. Salmon-Fiedler. Auflage 4. art. 249 und 252.

Hat Punkt P_1 eine solche Lage, dass $y_1 > b$, so ist die Doppelberührung in $y - y_1 = 0$ eine imaginäre, ist $x_1 > b$, dann wird $x - x_1 = 0$ Sehne einer imaginären Berührung und ist endlich gleichzeitig $\left\{\begin{matrix} y_1 > b \\ x_1 > a \end{matrix}\right\}$, dann giebt es überhaupt keine Kreise und gleichseitige Hyperbeln von obiger Axenlage, welche in reellen Punkten mit der Ellipse in Doppelberührung sind.

Unter den durch Gl. (3*) dargestellten Kegelschnitten befinden sich noch zwei andere gleichseitige Hyperbeln, nämlich für die gleichzeitigen Parameterwerte

$$K = \frac{1}{a^2} \text{ und } m = \pm \frac{b}{a},$$

welche die Glieder in x^2 und y^2 zum Verschwinden bringen. Die beiden restierenden Gleichungen lauten:

$$(12) \ldots 2ab.xy + 2a.(ay_1 - bx_1)y - 2b(ay_1 - bx_1)x - \left[a^2b^2 + (ay_1 - bx_1)^2\right] = 0 \text{ und}$$

$$(13) \ldots 2ab.xy - 2a(ay_1 + bx_1)y - 2b(ay_1 + bx_1)x + \left[a^2b^2 + (ay_1 + bx_1)^2\right] = 0$$

Durch ihre Transformation zu einem parallelen Axensystem durch die resp: Mittelpunkte, erhalten sie die Gestalt:

$$(14) \ldots \begin{cases} xy = \dfrac{\xi_1\eta_1 + ab}{2} \text{ und} \\ xy = \dfrac{\xi_2\eta_2 - ab}{2}, \end{cases}$$

wo den Mittelpunktskoordinaten ξ, η folgende Werte zukommen:

$$(14^a) \ldots \begin{cases} \xi_1 = \dfrac{-(ay_1 - bx_1)}{b}; & \xi_2 = \dfrac{+(ay_1 + bx_1)}{b}, \\ \text{und} \\ \eta_1 = \dfrac{+(ay_1 - bx_1)}{a}; & \eta_2 = \dfrac{+(ay_1 + bx_1)}{a}. \end{cases}$$

Die Gleichungen (14) sind die Asymptotengleichungen der in Rede stehenden gleichseitigen Hyperbeln und lassen im Verein mit Gl. (14^a) folgende Eigenschaften derselben erkennen:

Es giebt 2 gleichseitige Hyperbeln, deren Asymptoten parallel den Axen der Ellipse, deren Axen unter 45° gegen die letzteren geneigt sind. Ihre Mittelpunkte liegen auf den conjugierten Durchmessern $\frac{y}{x} = -\frac{b}{a}$ *und* $y = +\frac{b}{a}$ *der Ellipse, ihre Berührungssehnen sind Parallelen durch* P_1 *zu* $\frac{y}{x} = +\frac{b}{a}$ *resp:* $\frac{y}{x} = -\frac{b}{a}$. *Der Inhalt des durch die Koordinaten (im Axensystem d. Asymptoten) gebildeten Rechtecks ist bei der ersten Hyperbel gleich der halben Summe, bei der anderen gleich der halben Differenz der Rechtecke aus den betreffenden Mittelpunktskoordinaten und den halben Ellipsenaxen.*

Andere, die Ellipse doppelt berührende, gleichseitige Hyperbeln als die 4 bisher betrachteten sind nicht möglich. Selbstverständlich existiert für jedes den ausgezeichneten conjugierten Richtungen $y = \pm\frac{b}{a}$ parallele Berührungssehnenpaar auch ein Paar gleichseitiger Hyperbeln von denselben Eigenschaften wie die der obigen. Der Ort der Mittelpunkte dieser Doppelschaar von Hyperbeln ist eben das Linenpaar $\frac{y}{x} = \mp\frac{b}{a}$.

Ist speciell P_1 ein beliebiger Punkt eines der beiden erwähnten conjugierten Ellipsendurchmesser, z. B. von $\frac{y}{x} = +\frac{b}{a}$, dann muss die in dem betreffenden Durchmesser, hier in $\frac{y}{x} = +\frac{b}{a}$ doppelt berührende Hyperbel ein Centralkegelschnitt sein, denn es ist $\frac{y_1}{x_1} = m = +\frac{b}{a}$ *). Die beiden conjugierten

*) s. weiter unten p. 9.

Richtungen sind auch die Diagonalen des der Ellipse in ihren Scheiteln umschriebenen Rechtecks. Liegt P_1 auf der anderen Diagonale desselben, so fällt das Centrum der gleichseitigen Hyperbel, welche in ihr eine Doppelberührung hat, ebenfalls in den Ursprung und liegt endlich P_1 auf beiden Diagonalen zugleich, d. h. im Anfangspunkt selbst, dann fallen beide Hyperbelmittelpunkte hier zusammen. Die beiden in den Diagonalen doppelt berührenden gleichseitigen Hyperbeln erhalten die Gleichungen:

$$(15) \ldots xy = \pm\frac{ab}{2}$$

und bilden daher ein conjugiertes Paar.

Betrachten wir nun auch die andere gleichseitige Hyperbel, welche nicht in derselben Diagonale, auf welcher P_1 liegt, sondern in einer zur anderen parallelen Sehne berührt! Sie besitzt, da $m = -\frac{y_1}{x_1}$, und wenn wir beispielsweise P_1 auf $\frac{y}{x} = +\frac{b}{a}$ annehmen, auch $\frac{y_1}{x_1} = +\frac{b}{a}$ ist, die Gleichung:

$$(16) \ldots 2xy - 4\,\frac{b}{a}\,x_1 . x - 4.\,\frac{a}{b}\,y_1 . y + \frac{a}{b}\,(b^2 + 4y_1^2) = 0^*).$$

Ihre Asymptotengleichung lautet:

$$(17) \ldots xy = \frac{a}{2b} . (4y_1^2 - b^2) = \frac{b}{2a}\,(4x_1^2 - a^2)$$

und lehrt, dass die Aeste der doppelt berührenden Hyperbel (Fig. 1) in den Quadranten I und III oder II und IV liegen, je nachdem $x_1 \gtrless \frac{a}{2}$, $y_1 \gtrless \frac{b}{2}$ ist.

Dazwischen liegt der Fall $\left.\begin{matrix} x_1 = \frac{a}{2} \\ y_1 = \frac{b}{2} \end{matrix}\right\}$, in welchem die gleichseitige Hyperbel in das rechtwinkelige Asymptotenkreuz

*) Aus Gl. (13) abgeleitet.

degeneriert. Es reduciert sich nämlich Gl. (17) auf $xy=0$; die zugehörigen Centrumskoordinaten sind $\left\{\begin{matrix}\xi_2=a\\ \eta_2=b\end{matrix}\right\}$. Gl. (16) ergiebt für die gegenwärtige Lage von P_1: $(x-a).(y-b)=0$: die Gleichung des in zwei Ellipsenscheiteln tangierenden Asymptotenpaars. Liegt also P_1 vom Ursprung weiter entfernt als Punkt $\left\{\begin{matrix}x_1=\frac{a}{2}\\ y_1=\frac{b}{2}\end{matrix}\right\}$, so findet die Doppelberührung mit demselben Hyberbelast statt, jedoch in imaginären Punkten, so lange $\left\{\begin{matrix}x_1>+\frac{a}{\sqrt{2}}\\ y_1>+\frac{b}{\sqrt{2}}\end{matrix}\right\}$ ist. Wird $\left\{\begin{matrix}x_1=+\frac{a}{\sqrt{2}}\\ y_1=+\frac{b}{\sqrt{2}}\end{matrix}\right\}$, d. h. ist P_1 Ellipsenpunkt, dann ergiebt sich $\left\{\begin{matrix}\xi_2=+a\sqrt{2}\\ \eta_2=+b\sqrt{2}\end{matrix}\right\}$ und damit die Asymptotengleichung:

$$(18)\ldots xy=\frac{ab}{2}$$

Im ursprünglichen Koordinatensystem lautet dieselbe:

$$(19)\ldots 2xy-2b\sqrt{2}.x-2a\sqrt{2}.y+3ab=0.$$

Sie stellt die die Ellipse in P_1 vierpunktig berührende gleichseitige Hyperbel dar, denn die Berührungssehne ist zur Tangente der Ellipse geworden. Ist P_1 auf der Diagonale dem Ursprung entgegen über $\left\{\begin{matrix}x_1=\frac{a}{2}\\ y_1=\frac{b}{2}\end{matrix}\right\}$ hinausgerückt, dann liegen die Berührungspunkte auf verschiedenen Hyperbelästen. — Jenseits des Ursprungs kehren sich diese Verhältnisse um.

Ausser den ausgezeichneten Werten von m, welche zu den Kegelschnitten der Gleichungen (8) bis (11) und (12) bis (14) geführt

haben, ist noch die Neigungstangente $m = \frac{y_1}{x_1}$ deshalb bemerkenswert, weil hierfür die Glieder in x und y aus Gl. (3^a) verschwinden. D. h. aber:

Alle Kegelschnitte, welche in einer durch den Koordinaten-Ursprung gehenden Geraden die Ellipse doppelt berühren, sind Centralkegelschnitte.

Ihre gemeinsame Gleichung lautet:

$$(20) \ldots (b^2 x_1^2 k - y_1^2).x^2 + (a^2 k - 1)x_1^2.y^2 + 2x_1 y_1 . xy - a^2 b^2 x_1^2 k = 0.$$

Die Diskriminante derselben:

$$k\, x_1^2\, (b^2\, x_1^2 + a^2\, y_1^2 - a^2\, b^2\, x_1^2\, k)$$

verschwindet einmal für $k = 0$. Diesem Wert entspricht als Grenzfall der Parabel die Doppelgerade

$$(21) \ldots \left(y - \frac{y_1}{x_1}.x\right)^2 = 0.$$

(Wird P_1 auf der Y-, resp. X-Axe liegend angenommen, dann ist es die mit der Axe zusammenfallende Doppellinie $x^2 = 0$ resp. $y^2 = 0$).

Wegen der Unbestimmtheit des Schnittpunkts zweier zusammenfallenden Geraden kann derselbe sowohl im Unendlichen als auch im Koordinaten-Anfangspunkt liegen. Die so degenerierte Parabel darf also ebensowohl auch als Centralkegelschnitt aufgefasst werden.

Die Diskriminante der Gl. (20) verschwindet ferner für:

$$k = \frac{b^2\, x_1^2 + a^2\, y_1^2}{a^2\, b^2\, x_1^2}.$$

Hiermit ergiebt sich aus jener Gleichung:

$$(22) \ldots (b^2\, x_1 x + a^2\, y_1\, y)^2 = a^2\, b^2\, (a^2\, y_1^2 + b^2\, x_1^2),$$

diejenige des Tangentenpaars durch die diametralen Schnittpunkte der Geraden mit der Ellipse, welchen die Koordinatenwerte:

$$\left.\begin{matrix} x_1' \\ x_2' \end{matrix}\right\} = \frac{\mp a b x_1}{\sqrt{b^2 x_1^2 + a^2 y_1^2}}, \quad \left.\begin{matrix} y_1' \\ y_2' \end{matrix}\right\} = \frac{\mp a b y_1}{\sqrt{b^2 x_1^2 + a^2 y_1^2}}$$

zukommen. Auch bei diesem parallelen Tangentenpaar ist es gleichgiltig, ob man den unendlich fernen Schnittpunkt oder irgend einen anderen Punkt der Mittellinie, z. B. den Koordinaten-Anfangspunkt als Mittelpunkt betrachtet. Die durch die Gleichungen (21) und (22) dargestellten, zu den Centralkegelschnitten zu zählenden Linienpaare, vermitteln den Uebergang von Ellipsen zu Hyperbeln*), spielen also in der That die Rolle von Parabeln. Die Kegelschnitte der Gl. (20) sind nämlich

$$\text{Ellipsen für } k < 0 \text{ oder } k > \frac{b^2 x_1^2 + a^2 y_1^2}{a^2 b^2 x_1^2},$$

$$\text{Hyperbeln für } k > 0 \text{ und } k < \frac{b^2 x_1^2 + a^2 y_1^2}{a^2 b^2 x_1^2}.$$

Ist P_1 Ellipsenpunkt, dann treten entsprechende Vereinfachungen ein. So reduciert sich z. B. Gl. (22) auf

$$b^2 x_1 x + a^2 y_1 y + a^2 b^2 = 0.$$

Die Gleichungen der Parabeln, welche mit der Ellipse in einer veränderlichen, durch P_1 gehenden Sehne in Doppelberührung sind, erhält man durch Substitution der Parameterwerte k, welche aus der Bedingung

$$m^2 - (b^2 k - m^2) \cdot (a^2 k - 1) = 0$$

fliessen, in Gl. (3^a). Es sind dies:

$$k_1 = 0 \text{ und}$$

$$k_2 = \frac{a^2 m^2 + b^2}{a^2 b^2}.$$

Dem ersten Wert $k_1 = 0$ entspricht die Gleichung der Doppelgeraden:

$$(23) \ldots \left[(y - y_1) - m(x - x_1)\right]^2 = 0,$$

welche für bestimmte Werte von m auf zum Teil schon

*) cfr. p. 19.

erwähnte speciellere Grenzfälle zurückführt. Der andere Wert k_2 liefert bei wechselndem m die ganze Schaar aller möglichen, eigentlichen Parabeln. Dieselben können für specielle Werte von m aus der Gleichung:

$$(24)\ldots\ b^4 . x^2 + a^4 m^2 . y^2 + 2a^2 b^2 m . xy - 2a^2 b^2 m (y_1 - m x_1) x + 2 a^2 b^2 (y_1 - m x_1) y - \left[a^2 m^2 + b^2 + (y_1 - m x_1)^2\right] a^2 b^2 = 0$$

erhalten werden und wir sehen:

Es existiert für jede Gerade als Sehne der doppelten Berührung mit der Ellipse eine Parabel; dagegen lassen sich für ein bestimmtes k stets zwei doppelt berührende Parabeln finden,

denn aus dem obigen Ausdruck für k_2 leiten sich zwei gleiche und entgegengesetzte Werte für m ab. —

Insbesondere findet man für diejenigen beiden Parabeln, welche mit den Kreisen und gleichseitigen Hyperbeln (für $m = 0$ und $m = \infty$) gemeinsame Berührungspunkte besitzen, die Gleichungen (6) und (7) wieder.

In Gl. (3^a). verschwindet das absolute Glied für

$$k = \frac{-(y_1 - m x_1)^2}{a^2 b^2},$$

d. h. *Für jede durch P_1 gehende Gerade als Berührungssehne existiert ein doppelt berührender Kegelschnitt, welcher durch den Ursprung geht und stets eine Ellipse ist. — Der ihm entsprechende Wert von k ist* (wie für alle im Innern der Ellipse doppelt tangierenden Kegelschnitte) *wesentlich negativ.*

Die Schaar aller in Rede stehenden Kegelschnitte ist repräsentiert durch

$$(25)\ldots \left[a^2 m^2 + (y_1 - m x_1)^2\right] b^2 . x^2 + \left[b^2 + (y_1 - m x_1)^2\right] a^2 . y^2 - 2 a^2 b^2 m . xy + 2a^2 b^2 m (y_1 - m x_1) . x - 2a^2 b^2 (y_1 - m x_1) . y = 0.$$

Umgekehrt aber können für jedes negative k: 2 doppelt berührende Ellipsen gefunden werden, die durch den Ursprung gehen.

Die Gl. (3^{α}) stellt Ellipsen oder Hyperbeln dar, je nachdem

$$k.\left[a^2 m^2 + b^2 - a^2 b^2 k\right] \lessgtr 0,$$

und zwar

Ellipsen, wenn $k<0$ oder $k>\frac{a^2 m^2 + b^2}{a^2 b^2}$

und Hyperbeln, solange $k>0$ und $k<\frac{a^2 m^2 + b^2}{a^2 b^2}$.

Da in den zur Rechten stehenden Ungleichungen m nur in der zweiten Potenz auftritt, also ein bestimmter Wert des Ausdrucks $\frac{a^2 m^2 + b^2}{a^2 b^2}$ stets durch zwei gleiche aber entgegengesetzte m hervorgebracht wird, so können wir auch ganz allgemein sagen:

Wenn in irgend einer Lage der beweglichen Sehne ein doppelt berührender Kegelschnitt einer bestimmten Gattung existiert, so ist auch stets ein zweiter von der gleichen Art vorhanden. Die Berührungssehnen beider bilden supplementäre Winkel mit den Koordinaten-Axen.

Für die in $y-y_1=0$ und $x-x_1=0$ mit $S=0$ in Doppelberührung stehenden Kegelschnitte findet nur eine scheinbare Ausnahme statt, indem hier die beiden in Betracht kommenden Sehnenrichtungen sich decken.

Bezeichnet man die Berührungssehnen der beiden Kegelschnitte:

$$k.S-\left[(y-y_1)-m(x-x_1)\right]^2=0,$$

$$k.S-\left[(y-y_1)+m(x-x_1)\right]^2=0$$

symbolisch durch L_{+m} und L_{-m}, so findet man durch Subtraktion der beiden Gleichungen ein durch

$$(L_{+m}+L_{-m}).(L_{+m}-L_{-m})=0$$

dargestelltes Durchschnittssehnenpaar, nämlich:

$$y-y_1=0 \text{ und } x-x_1=0.$$

Dasselbe ist also, da m ausgefallen, für alle Kegelschnittspaare, die in obiger Beziehung stehen, das nämliche oder umgekehrt:

Die Schnittpunkte je zweier Berührungskegelschnitte in Sehnen durch dasselbe P_1, welche supplementäre Winkel mit den Axen bilden, liegen sämmtlich auf den Geraden $y - y_1 = 0$ und $x - x_1 = 0$, welche mit den Berührungssehnen ein harmonisches Büschel bilden *).*

Die Bedingung, dass die Gleichung zweiten Grades:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

zwei gerade Linien darstelle, wird durch das Verschwinden ihrer vollständigen Diskriminante, also der Determinante:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

ausgedrückt.

Die Werte von k, welche die 3 Linienpaare durch die 4 Schnittpunkte der Doppelgeraden $L^2 = 0$ mit der Ellipse liefern, ergeben sich hiernach für Gl. (3^a):

$$k_1 = 0,$$
$$k_2 = 0,$$
$$k_3 = \frac{(a^2m^2 + b^2) - (y_1 - mx_1)^2}{a^2 b^2}.$$

Da hier zweimal je zwei Schnittpunkte und damit zwei Linienpaare zusammenfallen, so finden sich auch zwei gleiche Werte k_1 und k_2, welche wieder die Doppelgerade Gl. (23) liefern. Dem dritten Wert k_3 entspricht das Tangentenpaar in den Endpunkten der Berührungssehne, dessen Gleichung gefunden wird:

$$(26)\ldots \left[b^2 - (y_1 - mx_1)^2\right] b^2 . x^2 + \left[a^2m^2 - (y_1 - mx_1)^2\right] a^2 . y^2 +$$
$$+ 2a^2 b^2 m . xy - 2a^2 b^2 m (y_1 - mx_1) x + 2a^2 b^2 (y_1 - mx_1)\, y -$$
$$- a^2 b^2 (a^2 m^2 + b^2) = 0.$$

*) s. auch S-F. art. 279.

Führt man die Zerlegung in die linearen Faktoren $\alpha x + \beta y + 1 = 0$ und $\gamma x + \delta y + 1 = 0$ aus und beachtet, dass den Schnittpunkten von $L=0$ mit $S=0$ die Koordinatenwerte:

$$\left.\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}\right\} = \frac{-a^2 m (y_1 - m x_1) \pm a b \sqrt{(a^2 m^2 + b^2) - (y_1 - m x_1)^2}}{a^2 m^2 + b^2},$$

$$\left.\begin{matrix} y_1 \\ y_2 \end{matrix}\right\} = \frac{+b^2 (y_1 - m x_1) \pm a b m \sqrt{(a^2 m^2 + b^2) - (y_1 - m x_1)^2}}{a^2 m^2 + b^2}$$

zukommen, so findet man

$$\alpha = -\frac{x_1}{a^2}, \beta = -\frac{y_1}{b^2};$$

$$\gamma = -\frac{x_2}{a^2}, \delta = -\frac{y_2}{b^2}$$

und hiermit die bekannte Gleichung des Tangentenpaars:

$$\left(x \cdot \frac{x_1}{a^2} + y \cdot \frac{y_1}{b^2} - 1\right) \cdot \left(x \cdot \frac{x_2}{a^2} + y \cdot \frac{y_2}{b^2} - 1\right) = 0.$$

Geht die Berührungssehne durch den Ursprung, so reduciert sich der dritte Wert für k auf

$$k_3 = \frac{b^2 x_1^2 + a^2 y_1^2}{a^2 b^2 x_1^2},$$

wozu das durch Gl. (22) dargestellte und als Grenzfall der Parabel erkannte Linienpaar gehört. Dasselbe kann demnach auch als degenerierte Hyperbel, nämlich als Tangentenpaar betrachtet werden, dessen Schnittpunkt in's Unendliche gerückt ist.

Nachdem im Vorherigen, mit ganz speciellen Kegelschnitten beginnend, die wichtigeren Sätze über Art und Beschaffenheit der aus Gl. (3^α) überhaupt ableitbaren Kegelschnitte kurz erörtert worden sind, fügen wir noch zwei weitere allgemeine Sätze hinzu:

1. In Gl. (3^α) sind die Glieder in xy, x und y frei von k. Besteht nun daneben noch die Gleichung:

$$2 (y_1 - m x_1)(y - m x) = 0,$$

dann ergeben sich durch Kombination derselben mit jener, oder — was dasselbe ist — mit

$$(b^2k-m^2)x^2+(a^2k-1)y^2+2mxy-\left[a^2b^2k+(y_1-mx_1)^2\right]=0$$

für die gemeinsamen Wurzeln gleiche, aber entgegengesetzte Werthe:

$$(27)\ldots\begin{cases}x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}\cdot\sqrt{a^2b^2+\dfrac{(y_1-mx_1)^2}{k}},\\ y=\pm\dfrac{m}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}\cdot\sqrt{a^2b^2+\dfrac{(y_1-mx_1)^2}{k}}.\end{cases}$$

Es ist also der Satz bewiesen:

Zieht man zu irgend einer Sehne eine Parallele $(y-mx=0)$ durch den Ursprung, so bilden alle in jener Sehne doppelt berührenden Kegelschnitte auf dieser Parallelen gleiche Abschnitte zu beiden Seiten des Ursprungs.

Wegen Gleichheit der ganzen Abschnitte, sind auch die zwischen irgend zwei Kegelschnitten auf der Sehne beiderseits vom Ursprung gelegenen Stücke einander gleich. —

2. Ist dagegen neben der Gl. (3^α) noch die folgende gegeben:

$$(28)\ldots 2mxy-2m(y_1-mx_1)x+2(y_1-mx_1)y=0,$$

dann erhält man, wenn sie mit der ersteren zusammengestellt wird, zur Bestimmung der Simultanwurzeln zwei Gleichungen vierten Grades:

$$x^4+2\frac{(y_1-mx_1)}{m}.x^3+\ldots\ldots=0 \text{ und}$$

$$y^4-2(y_1-mx_1).y^3+\ldots\ldots=0.$$

Da die Koefficienten der x^3 und y^3 die (von k unabhängigen) doppelten Mittelpunktskoordinaten ξ und η der durch Gl. (28) gegebenen gleichseitigen Hyperbel bedeuten, so hat man nach dem Viète'schen Satz für die Wurzeln der beiden letzten Gleichungen die Relationen:

$$x^{\mathrm{I}} + x^{\mathrm{II}} + x^{\mathrm{III}} + x^{\mathrm{IV}} = 2\xi,$$
$$y^{\mathrm{I}} + y^{\mathrm{II}} + y^{\mathrm{III}} + y^{\mathrm{IV}} = 2\eta \text{ oder}$$

$$(29) \quad \begin{cases} \frac{\xi}{2} = \frac{x^{\mathrm{I}} + x^{\mathrm{II}} + x^{\mathrm{III}} + x^{\mathrm{IV}}}{4}, \\ \frac{\eta}{2} = \frac{y^{\mathrm{I}} + y^{\mathrm{II}} + y^{\mathrm{III}} + y^{\mathrm{IV}}}{4}. \end{cases}$$

Die Schnittpunkte der gleichseitigen Hyperbel mit irgend einem durch Gl. (3^{α}) dargestellten Kegelschnitt bestimmen ein vollständiges Viereck (I II III IV). Denkt man sich dessen Gegenseiten halbiert und die Halbierungspunkte durch Geraden verbunden, so schneiden sich (wie leicht nachzuweisen) die drei Verbindungslinien in dem Punkte

$$II \quad \left\{ \frac{x^{\mathrm{I}} + x^{\mathrm{II}} + x^{\mathrm{III}} + x^{\mathrm{IV}}}{4}, \frac{y^{\mathrm{I}} + y^{\mathrm{II}} + y^{\mathrm{III}} + y^{\mathrm{IV}}}{4} \right\}$$

und wir können jetzt den Satz aussprechen:

Für die Vierecke der Schnittpunkte aller in der nämlichen Sehne doppelt berührenden Kegelschnitte mit einer durch den Ursprung gehenden gleichseitigen Hyperbel von der Gl. (28), ist der Punkt II derselbe, nämlich der Halbierungspunkt der Geraden, welche den Ursprung mit dem Hyperbelcentrum verbindet. —

Wir betrachten jetzt die Schaar der in irgend einer Sehne der Ellipse doppelt tangierenden Kegelschnitte etwas näher. (Fig. 2)

Für $k = +\infty$ ergiebt sich in allen Lagen der Berührungssehne aus Gl. (3) die Ellipse $S = 0$ selbst. Nimmt nun für ein bestimmtes $m : k$ mehr und mehr ab, dann erhalten wir, so lange $k > \frac{a^2 m^2 + b^2}{a^2 b^2}$ Ellipsen, deren Axen mehr und mehr wachsen, bis für $k = \frac{a^2 m^2 + b^2}{a^2 b^2}$ die Parabel erreicht ist. Die Mittelpunkte aller für die angenommene Sehne in Betracht kommenden Kegelschnitte liegen, wie in Abschn. III gefunden

wird, auf der Geraden $\frac{y}{x} = -\frac{1}{m}\cdot\frac{b^2}{a^2}$. Es hat sich also der Ellipsenmittelpunkt auf dieser Geraden vom Ursprung mehr und mehr entfernt, bis er, wenn die Ellipse zur Parabel geworden, in's Unendliche gerückt ist. Hiernach tritt er auf der anderen Seite der Mittelpunktsgeraden wieder in die Endlichkeit: Die Parabel ist in eine Hyperbel übergegangen und es ist jetzt $k < \frac{a^2 m^2 + b^2}{a^2 b^2}$. (Die Bewegung des Centrums bei abnehmendem k lässt sich genauer mit Hilfe der Mittelpunktskoordinaten (43) verfolgen.

Sobald k den Wert

$$k_1 = \frac{a^2 m^2 + b^2}{a^2 b^2} - \frac{(y_1 - mx_1)^2}{a^2 b^2}$$

erreicht hat, ist an Stelle der Hyperbel das Tangentenpaar getreten. Mit weiterer Abnahme von k erscheinen wieder Hyperbeln, bis k endlich gleich Null geworden. So lange $k > k_1$ war, fand die doppelte Berührung der Hyperbel mit dem einen ihrer vollständig im inneren Scheitelwinkelraum des Tangentenpaars gelegenen Aeste statt. (Dass beide Hyperbeläste in keinem ihrer Punkte den inneren Winkelraum überschreiten können, folgt daraus, dass 2 Gerade einen Kegelschnitt nur in 4, wenn auch paarweise zusammenfallenden Punkten zu schneiden vermögen).

Der Mittelpunkt des berührenden Kegelschnitts hat sich aus dem Unendlichen bis zu dem Schnittpunkt des Tangentenpaars auf der Geraden genähert. Er überschreitet den letzteren, indem $k < k_1$ wird. Von da an berühren die Hyperbeln die Ellipse mit getrennten Aesten, welche vollständig in dem ausserhalb des Scheitelwinkels des Tangentenpaars befindlichen Teil der Ebene liegen. Mit kleiner werdendem k dehnt sich die Hyperbel in der Richtung ihrer Hauptaxe mehr und mehr, bis sie für $k = 0$ in das Linienpaar durch die beiden gemeinsamen Berührungspunkte aller Kegelschnitte sich auflöst. Der

Mittelpunkt dieser Doppelgeraden ist ihr Schnittpunkt mit der Geraden $\frac{y}{x} = -\frac{1}{m} \cdot \frac{b^2}{a^2}$. Während sich nun weiter mit negativ wachsendem k das Centrum des Berührungskegelschnitts aus der letzteren Lage bis zum Ursprung hinbewegt, erscheint der erstere als Ellipse, deren Axen mehr und mehr zunehmen, bis für $k = -\infty$ die Ellipse $S = 0$ selbst wieder zum Vorschein kommt. — Für $+\infty > k > 0$ ist die Berührung der Kegelschnittschaar mit der Ellipse eine äussere, für $0 > k > -\infty$ eine innere. —

Man kann die Richtigkeit dieser Darstellung durch folgendes Verfahren zeigen:

Aus den Koordinatenwerten (27) für die Schnittpunkte der Sehne $y - mx = 0$ mit dem Kegelschnitt in Doppelberührung, berechnen sich die gleichen Abschnitte, welche dieser auf der Sehne zu beiden Seiten des Ursprungs bildet:

$$\varepsilon = \pm \sqrt{\frac{m^2+1}{a^2 m^2 + b^2}} \cdot \sqrt{a^2 b^2 + \frac{(y_1 - m x_1)^2}{k}}.$$

Wir nehmen zunächst k abnehmend von $+\infty$ bis 0 an. — Für $k = \infty$ wird der zweite Summand des Radikanden $= 0$ und wir erhalten $\varepsilon = \underset{+\infty}{\pm} \sqrt{\frac{m^2+1}{a^2 m^2 + b^2}} \cdot ab$. Mit abnehmendem k wächst jener Summand und mit ihm ε, bis $k = 0$ geworden; alsdann hat ε seinen Maximalwert $\varepsilon_0 = \pm \infty$ erreicht. Dem Wert $k = k_1$ entspricht ein bestimmtes $\varepsilon = \varepsilon_1$. Alle Werte von k, die noch $> k_1$, liefern ein $\varepsilon < \varepsilon_1$. Die dahin gehörigen Kegelschnitte, im Allgemeinen: Ellipsen, 1 Parabel und Hyperbeln verlaufen also im Innern des von den Tangenten gebildeten Winkelraums, in welchem die Ellipse $S = 0$ selbst liegt. Sie kehren den letzteren von Innen ihre convexe Seite zu und die Berührung der Hyperbeln insbesondere muss hiernach notwendigerweise mit demselben Ast erfolgen. Umgekehrt ergeben alle Werte von $k < k_1$ ein $\varepsilon > \varepsilon_1$. Die durch solche Werte von k bedingten Kegelschnitte: nur Hyperbeln, wenden

daher den Tangenten von Aussen ihre convexe Seite zu und berühren mit getrennten Zweigen. ε wird jetzt grösser und grösser und zuletzt $= \pm\infty$: die aussenberührenden Hyperbeln drücken sich mehr und mehr zusammen, bis sie endlich in die Doppelgerade zerfallen. — Ist k negativ wachsend von 0 bis $-\infty$, dann erzeugt, nachdem vorher für k (absol.) $< \frac{(y_1 - m\,y_1)^2}{a^2\,b^2}$ eine Reihe imaginärer ε sich ergeben hat,

$-\left[k\text{ (absol.)} = \frac{(y_1 - mx_1)^2}{a^2\,b^2}\right.$ entspricht dem Fall des Centralkegelschnitts, wofür $\varepsilon = 0\left.\right] -$

das grössere k auch ein grösseres ε. Für $k = -\infty$ ist wieder $\varepsilon = \varepsilon_{-\infty} = \varepsilon_{+\infty}$ und damit die Ellipse $S = 0$ erreicht.

Transformiert man Gl. (3^a) mittelst der Substitution:

$$\begin{cases} x = \dfrac{a^2 m x' + b^2 y'}{\sqrt{a^4 m^2 + b^2}}, \\ y = \dfrac{a^2 m y' - b^2 x'}{\sqrt{a^4 m^2 + b^2}} \end{cases}$$

auf das neue Axensystem der $\frac{y}{x} = -\frac{1}{m}\cdot\frac{b^2}{a^2}$ als $X' =$ und der dazu Senkrechten als Y'-Axe, dann erhält sie, nach Weglassung der die Variabele y enthaltenden Glieder, die Gestalt:

$$(a^2m^2+b^2)(a^2b^2k-a^2m^2-b^2)\,.\,x^2 - 2(a^2m^2+b^2)(y_1-mx_1)\sqrt{a^4m^2+b^2}\,.\,x -$$
$$(a^4m^2+b^2)\left[a^2b^2k+(y_1-mx_1)^2\right] = 0.$$

Die Wurzeln dieser Gleichung stellen die Schnittpunkte unserer (in der zu m gehörigen Sehne) doppelt berührenden Kegelschnitte mit der neuen X-Axe, dem Ort aller ihrer Mittelpunkte, dar. Die Bedingung, unter welcher diese, die Form $Ax^2 + Bx + C = 0$ besitzende Gleichung, 2 reelle, 2 gleiche oder 2 imaginäre Lösungen ergiebt, nämlich $B^2 - 4A\,.\,C \gtreqless 0$, liefert nach einiger Reduktion:

$$k \gtrless \frac{(a^2 m^2 + b^2) - (y_1 - m x_1)^2}{a^2 b^2} \text{ (oder } k_1\text{).}$$

Die Hyperbeln, welche einem $k > k_1$ entsprechen, werden hiernach in zwei reellen Punkten, die für $k < k_1$ auftretenden gar nicht von der X'-Axe geschnitten und es ist hiermit eine Bestätigung des vorher Gefundenen gewonnen.

Sind die Geraden $y - y_1 = 0$ und $x - x_1 = 0$ Sehnen der Doppelberührung, dann kehren im ersteren Falle die aussen-, im anderen Falle die innenberührenden Ellipsen ihr Axenverhältnis einmal um, weil sie die Kreisform zu passieren haben.

Ob die gleichseitigen Hyperbeln in diesen beiden Fällen, also für $m = 0$ und $m = \infty$, sowie in den beiden anderen $m = \pm \frac{b}{a}$ zu den mit einem oder mit zwei Aesten berührenden gehören, hängt offenbar von der Lage des Punktes P_1 ab. So ist z. B. die gleichseitige Hyperbel zu $y - y_1 = 0$ von der ersteren Art für $y_1^2 > \frac{b^4}{a^2 + b^2}$; denn damit folgt $\frac{1}{a^2 + b^2} > k_1$.

Für $y_1^2 > \frac{b^4}{a^2 + b^2}$ tritt statt der gleichseitigen Hyperbel das rechtwinkelige Tangentenpaar auf; $y_1^2 < \frac{b^4}{a^2 + b^2}$ liefert Hyperbeln der zweiten Art. Speciell ist für $y_1 = 0$: $\frac{1}{a^2 + b^2} < \left(\frac{b^2 - y_1^2}{a^2 b^2} = \frac{1}{a^2} \right)$, also berührt die gleichseitige Hyperbel mit 2 Aesten ausserhalb.

II.

Die aus den Gleichungen (8^α) bis (11^α) direkt zu entnehmenden Centrumskoordinaten haben, sobald man unter x_1 und y_1 die Koordinaten eines beliebigen Punktes P_1 versteht, ganz allgemeine Geltung. Mit ihrer Hilfe erhält man für die Verbindungslinie der beiden Kreismittelpunkte die Gleichung:

(30) . . . $\overline{C_1 C_2}$: $a^2 y_1 x - b^2 x_1 y - c^2 x_1 y_1 = 0$

und für diejenige der Centra der beiden gleichseitigen Hyperbeln die folgende Gleichung:

(31) . . . $\overline{H_1 H_2}$: $a^2 y_1 x + b^2 x_1 y - c_1^2 x_1 y_1 = 0$

Beiden Gleichungen wird durch die Koordinaten $x_1\ y_1$ genügt, d. h.

Die Mittelpunkte C_1 und C_2 der beiden Kreise, sowie diejenigen der beiden gleichseitigen Hyperbeln: H_1 und H_2 liegen mit dem Punkt P_1 auf je einer Geraden. Beide Geraden haben supplementäre Neigungen zu den Axen, bilden also mit den Berührungssehnen $y - y_1 = 0$ und $x - x_1 = 0$ ein harmonisches Strahlbüschel. (Fig. 3).

Die Koordinaten der Schnittpunkte 1 und 2; 3 und 4 jener Sehnen mit der Ellipse sind:

$$1 \text{ und } 2 \begin{cases} x = \pm \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - y_1^2} \\ y = y_1 \end{cases} \text{ und resp: } 3 \text{ und } 4 \begin{cases} x = x_1, \\ y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x_1^2}. \end{cases}$$

Die Gleichungen der Normalen in diesen Punkten lauten:

$$32 \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix} \right. \ldots a^2 b y_1 x \mp a b^2 \sqrt{b^2 - y_1^2} \cdot y \mp c^2 a \sqrt{b^2 - y_1^2} \cdot y_1 = 0 \text{ resp:}$$

$$33 \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix} \right. \ldots \pm a^2 b \sqrt{a^2 - x_1^2} \cdot x - a^2 b x_1 y \mp c^2 b \sqrt{a^2 - x_1^2} \cdot x_1 = 0$$

Dem Gleichungspaar (32) genügen die Mittelpunktskoordinaten des Kreises C_2; ebenso wird das Paar (33) durch die Mittelpunktskoordinaten des Kreises C_1 befriedigt. D. h.

Die Normalen in den Endpunkten der Berührungssehnen $x - x_1 = 0$, $y - y_1 = 0$ gehen durch die Centren der in diesen Punkten doppelt berührenden Kreise.

Es ist leicht, hiernach die Mittelpunkte der in Rede stehenden Kreise und gleichseitigen Hyperbeln durch Konstruktion zu finden.

Liegt P_1 auf der Ellipse selbst, fallen also die benachbarten Schnittpunkte 1 und 3 zusammen, so gehen die

Gleichungen (32$^\alpha$) und (33$^\alpha$) in die Gl. (30) über, welche bekanntlich die Normale im Ellipsenpunkt P_1 darstellt. Geometrisch heisst dies:

Die Kreiscentra C_1 und C_2 liegen mit dem Ellipsenpunkt P_1 auf einer Geraden, der Normalen in diesem Punkt. Die Gerade, auf welcher die Hyperbelmittelpunkte H_1 und H_2 liegen, ist in diesem Falle parallel den Normalen in den Punkten 2 und 4.

Zwischen den Distanzen der Punkte P_1; C_1; C_2 besteht für beliebige Lage von P_1 die Proportion:

$$(34) \ldots C_1C_2 : C_1P_1 : C_2P_1$$
$$= \frac{c^2}{a^2b^2}\cdot\sqrt{b^4x_1^2 + a^4y_1^2} : \frac{1}{a^2}\cdot\sqrt{b^4x_1^2 + a^4y_1^2} : \frac{1}{b^2}\cdot\sqrt{b^4x_1^2 + a^4y_1^2}$$
$$= c^2 : b^2 : a^2 = R_2 - R_1 : R_1 : R_2$$
$$= A_2 - A_1 : A_1 : A_2.$$

Die gegenseitigen Entfernungen von $P_1; H_1; H_2$ unterliegen der analogen Relation:

$$(35) \ldots H_1H_2 : H_1P_1 : H_2P_1$$
$$= \frac{c_1^2}{a^2b^2}\cdot\sqrt{b^4x_1^2 - a^4y_1^2} : \frac{1}{a^2}\cdot\sqrt{b^4x_1^2 - a^4y_1^2} : \frac{1}{b^2}\cdot\sqrt{b^4x_1^2 - a^4y_1^2}$$
$$= c_1^2 : b^2 : a^2 = R_2 + R_1 : R_1 : R_2$$
$$= A_2 + A_1 : A_1 : A_2.$$

Die Grössen:

$$R_2 = \frac{1}{b^2}\cdot\sqrt{b^4x_1^2 + a^4y_1^2}, \quad A_2 = \frac{1}{b^2}\cdot\sqrt{b^4x_1^2 - a^4y_1^2},$$

$$R_1 = \frac{1}{a^2}\cdot\sqrt{b^4x_1^2 + a^4y_1^2}, \quad A_1 = \frac{1}{a^2}\cdot\sqrt{b^4x_1^2 - a^4y_1^2}$$

stimmen, wenn P_1 Ellipsenpunkt ist, gemäss den Gleichungen (8$^\alpha$) bis (11$^\alpha$) mit dem Radius der betreffenden Kreise, resp: mit der Halbaxe der gleichseitigen Hyperbeln überein. —

Bezeichnen wir die Koordinaten

von C_1 mit $\begin{cases}\alpha_1\\0\end{cases}$, von H_1 mit $\begin{cases}\alpha'_1\\0\end{cases}$;

von C_2 mit $\begin{cases} 0 \\ \beta_2 \end{cases}$, von H_2 mit $\begin{cases} 0 \\ \beta'_2 \end{cases}$,

so können wir sofort folgende Relationen anschreiben:

1) $\alpha_1 + \alpha'_1 + \beta_2 + \beta'_2 = 2(x_1 + y_1)$,

2) $(\beta_2 + \beta'_2)\, x_1 = (\alpha_1 + \alpha'_1)\, y_1 = 2\, x_1 y_1 = 4 \triangle$.

Ferner mit den Bezeichnungen:

Inhalt von Dreieck $P_1 C_1 H_1 = \triangle_1$,

» » » $P_1 C_2 H_2 = \triangle_2$,

» » » $\frac{x_1 y_1}{2} = \triangle$:

3) $\triangle_1 = (\alpha'_1 - \alpha_1) \cdot \frac{y_1}{2} = 2\, \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_1 y_1}{2} = \frac{2\, b^2}{a^2} \cdot \triangle$,

$\triangle_2 = (\beta'_2 - \beta_2) \cdot \frac{x_1}{2} = 2\, \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{x_1 y_1}{2} = \frac{2\, a^2}{b^2} \cdot \triangle$.

---

folglich $\triangle_1 \cdot \triangle_2 = 4 \triangle^2$ oder $\triangle = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\triangle_1 \cdot \triangle_2}$ und

$$\triangle_1 : \triangle_2 : \triangle = b^4 : a^4 : \frac{a^2 b^2}{2}.$$

4) Da $\alpha'_1 \cdot \beta_2 = -\frac{c^2 \cdot c_1^2}{a^2 \cdot b^2} \cdot x_1 y_1 = -\frac{c^2 \cdot c_1^2}{a^2 \cdot b^2} \cdot 2 \triangle$,

$$\alpha'_1 \cdot \beta'_2 = +\frac{c^2 \cdot c_1^2}{a^2 \cdot b^2} \cdot x_1 y_1 = +\frac{c^2 \cdot c_1^2}{a^2 \cdot b^2} \cdot 2 \triangle;$$

so kann man sagen:

Wenn sich Punkt P_1 auf einer gleichseitigen Hyperbel $x y = \frac{a^2 b^2}{c^2 c_1^2} \cdot \lambda$ (wo λ eine beliebige Konstante) *bewegt und man denkt sich für jede Lage von P_1 die Linienpaare $\overline{C_2 C_1 P_1}$ und $\overline{H_2 P_1 H_1}$ konstruiert, so bleiben die Rechtecke $\alpha'_1 \cdot \beta_2$ und $\alpha_1 \cdot \beta'_2$ konstant $= -\lambda$ resp: $= +\lambda$. — Die algebraische Summe beider ist für jede beliebige Lage von P_1 gleich Null.*

5) Aus 2) folgt

$$(\alpha'_1 + \alpha_1) \cdot (\beta'_2 + \beta_2) = 8 \triangle;$$

aus 3) aber

$$(\alpha' - \alpha_1) \cdot (\beta'_2 - \beta_2) = 8 \triangle.$$

Die Gleichheit des Summen- und des Differenzenprodukts der Mittelpunktskoordinaten führt auf die vorhin ausgesprochene Beziehung:

$$\alpha'_1 \cdot \beta_2 + \alpha_1 \cdot \beta'_2 = 0$$

zurück.

Fasst man von den vier Punkten C_1; C_2; H_1; H_2 auf alle möglichen Arten je zwei mit dem Punkte P_1 zusammen, so erhält man drei Paare von Dreiecken, deren Schwerpunktskoordinaten sich wie folgt ergeben:

$$(36) \ldots \left\{ \begin{array}{lll} \text{Für } \triangle P_1 C_1 H_1 \text{ Schwerp:} & s_1 & \left\{ \begin{array}{l} x = x_1 \\ y = \dfrac{y_1}{3} \end{array} \right\}, \\ \text{» } \triangle P_1 C_2 H_2 \quad \text{»} & s_2 & \left\{ \begin{array}{l} x = \dfrac{x_1}{3} \\ y = y_1 \end{array} \right\}, \\ \text{» } \triangle P_1 C_2 H_1 \quad \text{»} & s_3 & \left\{ \begin{array}{l} x = \dfrac{2a^2 + b^2}{a^2} \cdot \dfrac{x_1}{3} \\ y = \dfrac{2b^2 - a^2}{b^2} \cdot \dfrac{y_1}{3} \end{array} \right\}, \\ \text{» } \triangle P_1 C_1 H_2 \quad \text{»} & s_4 & \left\{ \begin{array}{l} x = \dfrac{2a^2 - b^2}{a^2} \cdot \dfrac{x_1}{3} \\ y = \dfrac{2b^2 + a^2}{b^2} \cdot \dfrac{y_1}{3} \end{array} \right\}, \\ \text{» } \triangle P_1 C_1 C_2 \quad \text{»} & s_5 & \left\{ \begin{array}{l} x = \dfrac{2a^2 - b^2}{a^2} \cdot \dfrac{x_1}{3} \\ y = \dfrac{2b^2 - a^2}{b^2} \cdot \dfrac{y_1}{3} \end{array} \right\}, \\ \text{» } \triangle P_1 H_1 H_2 \quad \text{»} & s_6 & \left\{ \begin{array}{l} x = \dfrac{2a^2 + b^2}{a^2} \cdot \dfrac{x_1}{3} \\ y = \dfrac{2b^2 + a^2}{b^2} \cdot \dfrac{y_1}{3} \end{array} \right\}. \end{array} \right.$$

Mit Hilfe derselben findet man die Gleichungen der Verbindungslinien dieser Schwerpunkte:

$$(37)\ \ldots\ \begin{cases} \overline{s_1 s_2}: & y_1 . x + x_1 . y - \frac{4}{3} . x_1 y_1 = 0, \\ \overline{s_3 s_4}: & a^4 y_1 . x + b^4 x_1 . y - \frac{2}{3} (a^4 + b^4) . x_1 y_1 = 0, \\ \overline{s_5 s_6}: & a^4 y_1 . x - b^4 x_1 . y - \frac{2}{3} (a^4 - b^4) . x_1 y_1 = 0. \end{cases}$$

Die Gleichung der Geraden $\overline{OP_1}$:

$$(38)\ \ldots\ y_1 x - x_1 y = 0$$

mit der ersten der Gleichungen (37) verglichen, lässt erkennen, dass die beiden Geraden supplementäre Winkel mit den Koordinaten-Axen bilden. Dasselbe gilt von den beiden durch die übrigen Gleichungen (37) dargestellten geraden Linien. Den vier Gleichungen (37) und (38) genügen die Koordinatenwerte:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{2}{3} . x_1 \\ y &= \frac{2}{3} . y_1 \end{aligned}\right\},$$

welche zugleich die Mittelpunktskoordinaten jeder der Geraden $\overline{s_1 s_2}$; $\overline{s_3 s_4}$; $\overline{s_5 s_6}$ repräsentieren. D. h.

Die 3 Verbindungslinien der Schwerpunkte je zweier durch P_1 und zwei der Punkte C_1; C_2; H_1; H_2 bestimmten Dreiecke schneiden sich mit der Geraden $\overline{OP_1}$ in einem Punkte, dem Halbierungspunkt jener 3 Geraden. Derselbe liegt in $^2/_3$ der Länge von $\overline{OP_1}$ vom Ursprung aus gerechnet.

Die Gleichungen der durch s_3; s_6; s_4; s_5 bestimmten parallelen Linienpaare lauten:

$$(39)\ \ldots\ \begin{cases} \overline{s_4 s_6}: & \text{I} \equiv y - \frac{2b^2 + a^2}{b^2} . \frac{y_1}{3} = 0, \\ \overline{s_3 s_5}: & \text{II} \equiv y - \frac{2b^2 - a^2}{b^2} . \frac{y_1}{3} = 0, \\ \overline{s_4 s_5}: & \text{III} \equiv x - \frac{2a^2 - b^2}{a^2} . \frac{x_1}{3} = 0, \\ \overline{s_3 s_6}: & \text{IV} \equiv x - \frac{2a^2 + b^2}{a^2} . \frac{x_1}{3} = 0. \end{cases}$$

Bildet man mit ihrer Hilfe die Gleichung:

$$\lambda . \text{I.II} - \text{III.IV} = 0$$

des durch jene 4 Punkte gehenden Kegelschnitts und bestimmt λ so, dass er auch durch den Punkt $x_1\ y_1$ hindurchgeht, dann erhält man wegen $\lambda = -\frac{b^4}{a^4} \cdot \frac{x_1^2}{y_1^2}$ die Gleichung:

$$(40) \ldots a^4 y_1^2 . x^2 + b^4 x_1^2 . y^2 - 2 . \frac{2}{3} a^4 x_1 y_1^2 . x - 2 . \frac{2}{3} b^4 x_1^2 y_1 . y + (a^4 + b^4) . \frac{x_1^2 y_1^2}{3} = 0.$$

Derselben genügen, wie man sich leicht überzeugt, die Koordinaten der Punkte s_1; s_2 und $P_2\left(\frac{x_1}{3}, \frac{y_1}{3}\right)$; stets ist $-a^4 y_1^2 . b^4 x_1^2 < 0$. d. h. aber:

Die Dreiecksschwerpunkte s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6; P_1 *und der in* $^1/_3$ *von* $\overline{O P_1}$ *befindliche Punkt* P_2 *liegen auf einer Ellipse, deren Mittelpunkt* S *der in* $^2/_3\ \overline{O P_1}$ *gelegene Schnittpunkt jener 4 Geraden* [Gleichungen (37) und (38)] *ist und deren Axen parallel (resp: senkrecht zu) denen der Ellipse* $S = 0$ *sind.*

Man verificiert endlich leicht, dass

die Flächeninhalte der Sehnenvierecke $s_1\ P_1\ s_2\ P_2$ *und* $s_3\ s_6\ s_4\ s_5$ *einander gleich und zwar* $= \frac{8}{9} \cdot \triangle$ *sind.*

Setzt man in den Ausdrücken (43) p. 29 — bei gleichbleibendem k — für m gleiche und entgegengesetze Werte und stellt auf Grund der so gefundenen Koordinatenausdrücke $\xi_1\ \eta_1$ und $\xi_2\ \eta_2$ die Gleichung der Verbindungslinie der durch sie bestimmten zwei Punkte auf, so erhält man:

$$(41) \ldots b^2 x_1 . x - a^2 y_1 . y + \frac{a^2 b^2 (y_1^2 + m^2 x_1^2)}{a^2 m^2 + b^2 - a^2 b^2 k} = 0.$$

Die Koefficienten der Veränderlichen sind von m und k unabhängig und

die Verbindungslinien der Centra je zweier gleich-

artigen Kegelschnitte, welche in Sehnen durch dasselbe P_1 mit den Neigungstangenten m und $-m$ die Ellipse doppelt tangieren, sind daher *sämmtlich unter sich parallel und normal zu der Verbindungslinie der Hyperbelmittelpunkte H_1; H_2.* cfr. Gl. (31).

Unter denselben Voraussetzungen folgt aus den Koordinaten-Ausdrücken ferner, dass stets

$$\eta_1 \xi_2 + \eta_2 \xi_1 = 0$$

ist.

Für den Specialfall $m = \pm \frac{b}{a}$ und gleichzeitig $k = \frac{1}{a^2}$ geht Gl. (41) über in:

$$(42) \ldots b^2 x_1 . x - a^2 y_1 . y + (a^2 y_1^2 - b^2 x_1^2) = 0,$$

eine Gleichung, welcher die Werte x_1 y_1 der Variabelen Genüge leisten. Auch bestätigt man leicht, dass $\frac{\xi_1 + \xi_2}{2} = x_1$ und $\frac{\eta_1 + \eta_2}{2} = y_1$ ist.

Die Verbindungslinie der Mittelpunkte der beiden gleichseitigen Hyperbeln, welche in dem zu den Durchmessern $\frac{y}{x} = \pm \frac{b}{a}$ der Ellipse parallelen Sehnenpaar durch P_1 doppelt tangieren, geht durch Punkt P_1 und wird in ihm halbiert. Natürlich steht auch sie senkrecht auf $\overline{H_1 H_2}$.

III.

Für die Koordinaten des Mittelpunkts irgend eines durch Gl. (3ᵃ) dargestellten Kegelschnitts findet man die Ausdrücke:

$$(43) \ldots \begin{cases} \xi = \dfrac{-a^2 m . (y_1 - m x_1)}{a^2 m^2 + b^2 - a^2 b^2 k}, \\ \eta = \dfrac{+b^2 . (y_1 - m x_1)}{a^2 m^2 + b^2 - a^2 b^2 k}. \end{cases}$$

Die Elimination von k aus denselben liefert die Gleichung des Mittelpunktsortes aller der Kegelschnitte, welche in einer bestimmten Sehne durch P_1 mit der Ellipse in Doppelberührung sind. Durch einfache Division obiger Gleichungen ergiebt sich die Gleichung des fraglichen Ortes als vom ersten Grade:

$$(44) \quad \ldots \quad \frac{\eta}{\xi} = -\frac{1}{m} \cdot \frac{b^2}{a^2}.$$

Schreiben wir für m: $tg\,\vartheta$ und für die Neigungstangente der Ortsgeraden $\frac{\eta}{\xi}$: $tg\,\vartheta'$, so folgt

$$tg\,\vartheta \,.\, tg\,\vartheta' = -\frac{b^2}{a^2}$$

oder in Worten:

Der geometrische Ort der Mittelpunkte der Kegelschnittschaar, welche in einer beliebigen Sehne die Ellipse doppelt berührt, ist eine Gerade durch den Ursprung und wird gefunden, indem man zu dem zur Berührungssehne parallelen Ellipsendurchmesser den conjugierten sucht.

Für $m = 0$ stellt Gl. (44) die Y-, für $m = \infty$ die X-Axe dar. Ist P_1 Ellipsenpunkt und wird die Berührungssehne zur Tangente in P_1, die Doppelberührung also zur vierpunktigen, so folgt mit $m = -\frac{b^2 \,.\, x_1}{a^2 \,.\, y_1}$ aus Gl. (44):

$$\frac{\eta}{\xi} = \frac{y_1}{x_1}.$$

Bei der vierpunktigen Berührung ist der Mittelpunktsort (44) der Durchmesser nach dem Berührungspunkt.

Eliminiert man aus (43) nicht k, sondern m, was durch Substitution des Werts für m aus Gl. (44) in (43) erreicht wird, so erhält man die Gleichung zweiten Grades:

$$(45) \quad \ldots \quad b^2 \xi^2 - a^2 (a^2 k - 1)\eta^2 - b^2 x_1 \,.\, \xi - a^2 y_1 \,.\, \eta = 0.$$

Der geometrische Ort der Mittelpunkte der Kegelschnittschaar, die einem festen Parameterwert k ent-

spricht, während die Ber:-Sehne durch P_1 alle möglichen Lagen passiert, ist ein Kegelschnitt, welcher durch den Ursprung geht und dessen Axen mit denen der Ellipse parallel sind.

Denkt man sich nun noch k variabel, so erhält man, wenn es alle möglichen Werte von $+\infty$ bis $-\infty$ durchläuft, die ganze Schaar von Kegelschnitten, auf denen die Mittelpunkte sämmtlicher, die Ellipse doppelt berührender Kegelschnitte Gl. (3^{α}) liegen.

Gl. (45) wird durch $\begin{pmatrix}\xi=0\\ \eta=0\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}\xi=x_1\\ y=0\end{pmatrix}$ befriedigt. Die Centrumskoordinaten irgend eines Kegelschnitts der durch sie repräsentierten Schaar finden sich:

$$(46)\ \ldots\ \begin{cases}\xi = \frac{x_1}{2},\\ \eta = -\frac{y_1}{2(a^2k-1)}.\end{cases}$$

Bildet man für ein beliebiges k, z. B. für $k=\frac{1}{a^2}$, die Gleichung eines den hierzu gehörigen Kegelschnitt (45) in der X-Axe doppelt berührenden neuen Kegelschnitts:

$$(47)\ \ldots\ k_1.\left(\xi^2-\frac{a^2}{b^2}.y_1.\eta-x_1.\xi\right)-\eta^2=0,$$

so kann man durch passende Wahl von k_1 dieselbe stets auf die Form der Gl. (45) bringen.

Im vorliegenden Fall ist zu setzen: $k_1=\frac{b^2}{a^2(a^2k-1)}$. Für $k_1=\infty$ erhält man wieder den ursprünglichen Kegelschnitt (50). Ebenso lassen sich aus jedem anderen Kegelschnitt der Schaar Gl. (45) alle übrigen derselben Schaar nach demselben Verfahren ableiten. Dieses Ergebnis lässt sich mit dem vorher Gefundenen in den Satz zusammenfassen:

Alle Kegelschnitte der durch Gl. (45) *repräsentierten Schaar besitzen den Axen der Ellipse parallele Axen*

und gehen im Ursprung und im Punkte $\begin{pmatrix}\xi=x_1\\ \eta=0\end{pmatrix}$ *selbst eine Doppelberührung mit einander ein. Der Ort ihrer Mittelpunkte ist die im Abstande* $=\frac{x_1}{2}$ *zur Y-Axe parallele Gerade.*

Wir suchen jetzt die bemerkenswertesten Kegelschnitte der Schaar (45) auf. —

Die Gleichung stellt einen

Kreis dar für $k=\frac{c^2}{a^4}$. Seine Gleichung wird:

$$(48)\ \ldots\ \xi^2+\eta^2-x_1.\xi-\frac{a^2}{b^2}.y_1.\eta=0.$$

Sie repräsentiert eine gleichseitige Hyperbel für $k=\frac{{c_1}^2}{a^4}$. Ihre Gleichung lautet:

$$(49)\ \ldots\ \xi^2-\eta^2-x_1\,\xi-\frac{a^2}{b^2}.y_1.\eta=0.$$

Eine Parabel entspricht ihr, wenn $k=\frac{1}{a^2}$ gesetzt wird. Dieselbe hat zur Gleichung:

$$(50)\ \ldots\ \xi^2-x_1.\xi-\frac{a^2}{b^2}.y_1.\eta=0.$$

Allgemein sind die Kegelschnitte der Schaar

Ellipsen, solange $k<\frac{1}{a^2}$,

Hyperbeln, » $k>\frac{1}{a^2}$ ist.

Für $k=\frac{b^2{x_1}^2+a^2{y_1}^2}{a^2b^2{x_1}^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{{y_1}^2}{b^2{x_1}^2}$

erscheint das Linienpaar:

$$(51)\ \ldots\ \left\{\begin{array}{l} b^4{x_1}^2.\xi^2-a^4{y_1}^2.\eta^2-a^2b^2{x_1}^2y_1.\eta-b^4{x_1}^3.\xi=0\text{ oder}\\ b^2x_1\xi+a^2y_1\eta=0\ \ldots\ 1.)\text{ und}\\ b^2x_1\xi-a^2y_1\eta-b^2{x_1}^2=0.\ .\ 2.)\end{array}\right\}$$

Die eine Gerade 1) des Paares ist eine durch den Ursprung gehende und in ihm die übrigen Kegelschnitte berührende Parallele zur Tangente in P_1 (als Ellipsenpunkt gedacht); die andere 2) in $\left\{\begin{matrix}\xi = x_1\\ \eta = 0\end{matrix}\right\}$ die Schaar gemeinsam berührend, bildet mit den Koordinaten-Axen Winkel, welche die der vorigen Geraden zu 180° ergänzen. Der Schnitt- und Mittelpunkt des Tangentenpaars liegt auf der Geraden $\xi = \frac{x'}{2}$ im Abstand $\eta = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1} \cdot \frac{x_1}{2}$ von der X-Axe. — Zur Schaar gehört ferner für $k = \infty$ die Doppelgerade $\eta^2 = 0$.

Um zu entscheiden, welcher Art diejenigen Kegelschnitte sind, deren Mittelpunkte den soeben charakterisierten Repräsentanten der Schaar Gl. (45) angehören, bilden wir die den Specialwerten von k entsprechenden Gleichungen (3^α). Für $k = \frac{c^2}{a^4}$ erhält man:

$$(52)\ \ldots\ (b^2c^2 - a^4m^2).x^2 - a^2b^2.y^2 - 2a^4m.xy - 2ma^4(y_1 - mx_1).x + 2a^4(y_1 - mx_1).y - a^2\left[b^2c^2 + a^2(y_1 - mx_1)^2\right] = 0.$$

Von den drei Bedingungen:

$$c^2.a^2.(a^4m^2 + b^4) \begin{matrix}<\\ =\\ >\end{matrix} 0 \quad \begin{matrix}\text{Ell:}\\ \text{Par:}\\ \text{Hyp:}\end{matrix}$$

sind, da c^2 positiv vorausgesetzt ist, die beiden ersten nur durch imaginäre Werte von m zu erfüllen.

Der Kreis Gl. (48) *enthält nur die Mittelpunkte von Hyperbeln* Gl. (52).

Mit $k = \frac{c_1^2}{a^4}$ wird Gl. (3^α) zu:

$$(53)\ \ldots\ (b^2c_1^2 - a^4m^2).x^2 + a^2b^2.y^2 + 2a^4m.xy - 2ma^4(y_1 - mx_1).x + 2a^4(y_1 - mx_1).y - a^2\left[b^2c_1^2 + a^2(y_1 - mx_1)^2\right] = 0.$$

Man hat

$$c_1^2 . a^2 . (a^4 m^2 - b^4) \gtreqless 0, \quad \begin{matrix} \text{Ell:} \\ \text{Par:} \\ \text{Hyp:} \end{matrix}$$

$$\text{d. h. } m^2 \gtreqless \frac{b^4}{a^4}$$

Auf der Hyperbel Gl. (49) *liegen die Mittelpunkte sowohl von Hyperbeln als auch von Ellipsen und diejenigen von zwei Parabeln.*

Die beiden Parabeln für $m = \pm \frac{b^2}{a^2}$ haben die Gleichungen:

$$(54) \ldots a^2 b^2 . (x \mp y)^2 \mp 2b^2 (a^2 y_1 \mp b^2 x_1) . x + 2a^2 (a^2 y_1 \mp b^2 x_1) . y$$
$$- \left[a^2 b^2 c_1^2 + (a^2 y_1 \mp b^2 x_1) \right] = 0 .$$

$k = \frac{1}{a^2}$ liefert:

$$(55) \ldots (b^2 - a^2 m^2) . x^2 + 2a^2 m . xy - 2ma^2 (y_1 - m x_1) . x +$$
$$2a^2 (y_1 - m x_1) . y - a^2 \left[b^2 + (y_1 - m x_1)^2 \right] = 0 ,$$

eine Gleichung, welche für $m^2 a^4 \gtreqless 0$ $\begin{matrix} \text{Ell:} \\ \text{Par: darstellen würde:} \\ \text{Hyp:} \end{matrix}$

Die Parabel Gl. (50) *ist der Mittelpunktsort der durch* Gl. (55) *dargestellten Hyperbeln und einer Parabel* (genauer zweier zusammenfallenden Parabeln).

Die letztere ist durch Gl. (6) bereits gegeben; ihr Centrum ist der unendlich ferne Punkt der Parabel, welche zur Gl. (50) gehört.

$k = \frac{b^2 x_1^2 + a^2 y_1^2}{a^2 b^2 x_1^2}$ lässt aus Gl. (3^α):

$$(56) . . b^2 (b^2 x_1^2 + a^2 y_1^2 - a^2 m^2 x_1^2) . x^2 + a^4 y_1^2 . y^2 + 2ma^2 b^2 x_1^2 . xy$$
$$- 2ma^2 b^2 x_1^2 (y_1 - m x_1) . x + 2a^2 b^2 x_1^2 (y_1 - m x_1) . y$$
$$- a^2 b^2 . \left[b^2 x_1^2 + a^2 y_1^2 + x_1^2 (y_1 - m x_1)^2 \right] = 0$$

entstehen. Die Diskriminante erhält sowohl ihre positiven als auch negativen Werte durch reelle m; von den beiden m,

welche sie zum Verschwinden bringen, führt $m = + \frac{y_1}{x_1}$ wieder auf Gl. (22). Dem anderen m entspricht eine Parabel.

Dem Tangentenpaar Gl. (51) *gehören die Centren von Ellipsen und Hyperbeln, dasjenige einer für* $m = - \frac{y_1}{x_1}$ *auftretenden Parabel und der unendlich ferne Schnittpunkt des Tangentenpaares* Gl. (22) *an.*

Die Mittellinie des letzteren ist nämlich die eine Gerade 1): $b^2 x_1 \xi + a^2 y_1 \eta = 0$ des Paares Gl. (51); die andere Gerade 2) ist die Axe der erwähnten Parabel.

Man bemerkt, dass die allgemeinen Ausdrücke der Mittelpunktskoordinaten (43) für $k = \frac{a^2 m^2 + b^2}{a^2 b^2}$ unendliche Werte annehmen; doch sind weitere Mittelpunktsörter von Parabeln mit Zuhilfenahme des letzteren Ausdrucks leicht abzuleiten. Wir setzen nämlich in Gl. (45) statt k diesen seinen Wert in m und erhalten:

$$(57) \quad \ldots b^2 . \xi^2 - \frac{a^4}{b^2} m^2 . \eta^2 - b^2 x_1 . \xi - a^2 y_1 . \eta = 0$$

als Gleichungsform der Mittelpunktskurven, welche die unendlich fernen Centra aller Parabeln enthalten. Setzen wir $m = \pm \frac{b^2}{a^2}$, suchen also den Mittelpunktsort der Parabeln Gl. (54), so erhalten wir aus Gl. (57) die Hyperbelgl. (49) wieder; nehmen wir $m = 0$, so muss der Kegelschnitt erscheinen, welcher das unendlich ferne Centrum der Parabel Gl. (6.) enthielt. In der That erhält man wieder die Parabelgl. (50). Die Parabel der Gl. (7) war aus der allgemeinen Parabelgl. (24) für $m = \infty$ hervorgegangen. Setzen wir daher in Gl. (57) $m = \infty$, so resultiert $\eta^2 = 0$ als Mittelpunktsort; d. h. der unendlich ferne Punkt der X-Axe ist das Centrum der Parabel: Gl. (7). Die Doppelgerade $\eta^2 = 0$ wird auch als Mittelpunktsort der Ellipse $S = 0$ (als doppelt berühr: Kegelschnitts) aus Gl. (45) für $k = \infty$ erhalten.

Unter den Kegelschnitten der durch die letztere Gleichung bestimmten Schaar ist einer als besonders bemerkenswert noch hervorzuheben. Es ist die Ellipse, deren Gleichung:

$$(58) \ldots b^2.\xi^2 + a^2.\eta^2 - b^2 x_1.\xi - a^2 y_1.\eta = 0$$

für $k=0$ aus Gl. (45) hervorgeht. Dieser Wert führt Gl. (3^α) über in:

$$m^2.x^2 + y^2 - 2m.xy + 2m(y_1 - mx_1).x - 2(y_1 - mx_1).y + (y_1 - mx_1)^2 = 0,$$

eine Gleichung, deren Identität mit Gl. (23) ersichtlich ist. Hiernach

halbiert die durch Gl. (58) *dargestellte Ellipse alle durch P_1 gezogenen Sehnen der Ellipse $S=0$.*

Gl. (58) wird ausser durch $\begin{pmatrix}\xi=0\\ \eta=0\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}\xi=x_1\\ \eta=0\end{pmatrix}$ noch durch die Koordinaten $\begin{pmatrix}\xi=0\\ \eta=y_1\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}\xi=x_1\\ \eta=y_1\end{pmatrix}$ befriedigt.

Ferner ist die Gleichung der Tangente an die in Rede stehende Ellipse im Punkt P_1 $(x_1\ y_1)$ für den Fall, dass derselbe der Ellipse $S=0$ angehört, nämlich:

$$b^2 x_1.\xi + a^2 y_1.\eta - a^2 b^2 = 0$$

identisch mit der Tangentengleichung der Ellipse $S=0$ selbst für den nämlichen Berührungspunkt.

Der Mittelpunkt endlich der betrachteten Ellipse hat die Koordinaten

$$\left.\begin{aligned}\xi &= \frac{x_1}{2}\\ \eta &= \frac{y_1}{2}\end{aligned}\right\}.$$

Alles dieses fassen wir in dem Satz zusammen:

Die durch Gl. (58) *gegebene Ellipse, die mit der Ellipse $S=0$ ähnlich und in ähnlicher Lage ist, schneidet im Abstand y_1 vom Ursprung die Y-Axe (und im Abstand x_1 die X-Axe, daselbst in Doppel-*

berührung mit den übrigen Kegelschnitten der Schaar). Ihr Centrum ist der Mittelpunkt der halben Verbindungslinie von P_1 mit dem Ursprung. Sie besitzt im Punkte P_1, wenn derselbe auf der gegebenen Ellipse $S=0$ liegt, eine einfache Berührung (I. O.) mit derselben,

Wir fügen für diesen besonderen Fall noch hinzu:

Ihre Brennpunkte halbieren die nach dem Punkte P_1 gezogenen Leitstrahlen:

$$(y_1 . x - x_1 . y) - c . (y - y_1) = 0,$$
$$(y_1 . x - x_1 . y) + c . (y - y_1) = 0$$

der Ellipse $S=0$, welche mit der Geraden $y - y_1 = 0$ und der Ber:-Sehne durch den Ursprung ein harmonisches Büschel bilden. Axen und Excentricität sind halb so gross als bei $S=0$. (Auch wenn P_1 nicht Ellipsenpunkt ist, findet die Proportion statt: $A:B = a:b$).

Man kann die Ellipse der Gl. (58) auch erzeugt denken durch zwei projektivische Strahlbüschel, die für wechselndes m durch:

$$(59) \ldots \begin{cases} \text{I.} & (y - y_1) - m . (x - x_1) = 0, \\ \text{II.} & x + m . \dfrac{a^2}{b^2} . y = 0 \end{cases}$$

dargestellt sind. Die Elimination von m führt auf Gl. (58) zurück:

Aber auch jeder andere Kegelschnitt der Schaar Gl. (45) kann als Erzeugnis zweier projektivischen Strahlbüschel gewonnen werden. Die Gesammtheit dieser Büschel drückt das allgemeinere Gleichungssystem:

$$(60) \ldots \begin{cases} \text{I.} & [(a^2 k - 1) y + y_1] + m . (x - x_1) = 0, \\ \text{II.} & x + m . \dfrac{a^2}{b^2} . y = 0 \end{cases}$$

aus, welches durch Elimination von m die Gl. (45) entstehen lässt. Das Strahlbüschel II bleibt unverändert dasselbe, der Scheitel des Büschels I dagegen bewegt sich bei wechselndem k der Geraden $x - x_1 = 0$ entlang; seine Ordinate bestimmt sich

$= \frac{-y_1}{a^2 k - 1}$ und ist also gleich der Ordinate des zweiten Schnittpunktes des Kegelschnitts (45) mit der Y-Axe:

Bewegt sich der Scheitel des ersten der beiden projekt: Strahlbüschel Gl. (60) *auf der Geraden* $x - x_1 = 0$, *dann entsteht die ganze Schaar der durch* Gl. (45) *repräsentierten Kegelschnitte, deren Mittelpunktsort die zur vorigen paralle Gerade* $x - \frac{x_1}{2} = 0$ *ist.*

Für $k = 2 . \frac{1}{a^2}$ entspringt aus Gl. (45) die der Hyperbel, welche der vorigen Ellipse entspricht, nämlich:

(61) . . . $b^2 . \xi^2 - a^2 . \eta^2 - b^2 x_1 . \xi - a^2 y_1 . \eta = 0.$

Die Kurve geht durch die Punkte $\begin{pmatrix} \xi = 0 \\ \eta = -y_1 \end{pmatrix}$ und $\begin{Bmatrix} \xi = +\frac{x_1}{2} \\ \eta = -\frac{y_1}{2} \end{Bmatrix}$ hindurch und besitzt den Mittelpunkt:

$$\begin{Bmatrix} \xi_1 = +x_1 \\ \eta_1 = -y_1 \end{Bmatrix}.$$

Alle Mittelpunkte der durch Gl. (26) *dargestellten Linienpaare, die endlichen sowohl als auch der unendlich ferne*), haben zum Ort keinen Kegelschnitt, wie die Centren der die Ellipse doppelt berührenden wirklichen Kegelschnitte, sondern eine Gerade.*

Ihre Gleichung wird durch Elimination von m aus dem System der Koordinatenwerte für den Schnitt- und Mittelpunkt des Paares Gl. (26), nämlich aus:

$$(62) \ldots \quad \begin{Bmatrix} \xi = \frac{-a^2 m}{y_1 - m x_1}, \\ \eta = \frac{+b^2}{y_1 - m x_1} \end{Bmatrix}$$

*) cfr. Gl. (22).

erhalten und lautet:

$$(63) \quad b^2 x_1 . \xi + a^2 y_1 . \eta - a^2 b^2 = 0.$$

Sie stellt bekanntlich die Polare des Punktes x_1 y_1 in Bezug auf die Ellipse $S = 0$ dar, welche diese Ellipse in zwei reellen, zwei zusammenfallenden oder zwei imaginären Punkten schneidet, je nachdem P_1 ausserhalb, auf oder im Innern der Ellipse liegt.

Der Vergleich von Gl. (63) mit Gl. (51_1) zeigt, dass beide Geraden parallel sind, in Uebereinstimmung damit, dass der Schnittpunkt des Tangentenpaars Gl. (22) auch auf (51_1) liegt.

Die Untersuchung der Hauptrepräsentanten der Kegelschnittschaar (45) erlaubt uns, kurz folgendes Bild der letzteren mit ihren Uebergängen zu entwerfen.

Dem Wert $k = 0$ entspricht hier nicht wie bei der im Abschnitt I für ein fixes m betrachteten Schaar, die Doppelgerade durch die gemeinsamen Berührungspunkte, sondern die Ellipse mit dem Halbaxenverhältnis $A : B = a : b$. [Gl. (58)]. Mit positiv zunehmendem k wächst auch die Centrumsordinate $\eta_c = + \frac{y_1}{2(1 - a^2 k)}$; für den Kreis ist $\eta_c = + \frac{y_1}{2} \cdot \frac{a^2}{b^2}$ geworden. Hier kehrt die Ellipse ihr Axenverhältnis um: es ist nun $B > A$; der Mittelpunkt rückt ferner und ferner bis $\eta_c = + \infty$ geworden und damit die Ellipse in die Parabel übergegangen ist. Alsdann ist $k = \frac{1}{a^2}$. Jetzt bewegt sich der Mittelpunkt auf der anderen Seite der Geraden $x - \frac{x_1}{2} = 0$ (also bei $\eta_c < 0$, $k > \frac{1}{a^2}$), Hyperbeln angehörend, bis zum Schnittpunkt des Tangentenpaars für $k = \frac{1}{a^2} + \frac{y_1^2}{x_1^2} \cdot \frac{1}{b^2}$. Die Hyperbeln, welche mit den vorigen Kegelschnitten in demselben Scheitelwinkelraum des Tangentenpaars liegend, bisher mit einem Ast berührten, kehren jetzt ihre Konvexität von der anderen Seite

her den Tangenten zu und tangieren zweiästig. Sie dehnen sich mehr und mehr in der Richtung der Hauptaxe, bis sie in die Doppelgerade $\eta^2=0$ zerfallen. Der Mittelpunkt ist dann über die Lage $\eta_c = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1} \cdot \frac{x_1}{2}$ hinaus bis in die X-Axe gerückt. k hat den Wert $\pm\infty$ erreicht. Nun folgen für negativ abnehmendes k, sich mehr und mehr erweiternde Ellipsen, zu denen die Doppelgerade $\eta^2 = 0$ den Uebergang bildete, bis endlich wieder $k = 0$ geworden ist. Um zu entscheiden, welcher Art die Doppelberührung der gleichseit: Hyperbel ist, sind ähnliche Betrachtungen, wie die Ende des Abschn. I angestellten, erforderlich. — Während bei der dort betrachteten Schaar die Axen der einzelnen Kegelschnitte fortwährend ihre Lage ändern müssen, bleibt hier, für die Schaar (45), die eine Axe dieselbe, nämlich die Senkrechte: $x - \frac{x_1}{2} = 0$ zur gemeinsamen Berührungssehne.

Auf die Modifikationen, welche die vorstehende, für die Ellipse $S=0$ durchgeführte Untersuchung für $b=a=r$ erleidet, soll nicht weiter eingegangen werden.

IV.

Wir nahmen seither an, der Punkt P_1 habe eine feste, wenn auch beliebige Lage in der Ebene. Jetzt setzen wir ihn als nach einem bestimmten Gesetze veränderlich voraus und suchen die Enveloppe der für ein bestimmtes k den verschiedenen Lagen des Punktes P_1 entsprechenden Kegelschnitte der Gl. (45).

Wir beschränken uns darauf, den Punkt auf einem Centralkegelschnitt und dann auf einer Parabel beweglich zu denken.

Fall 1. P_1 durchlaufe eine Ellipse $\varkappa \equiv b_1^2 x^2 + a_1^2 y^2 - a_1^2 b_1^2 = 0$. Da x und y beständig dieser Gleichung genügen sollen, so lässt

sich aus ihr y_1 durch seinen Wert in x_1 in Gl. (45) ersetzen: Man erhält:

$$b^2.\xi^2 - a^2(a^2k-1).\eta^2 - b^2\xi.x_1 - a^2\eta.\frac{b_1}{a_1}\sqrt{a_1^2-x_1^2} = 0,$$

oder nach dem unbestimmten Parameter x_1 geordnet:

$$\left[b^4a_1^2.\xi^2 + a^4b_1^2.\eta^2\right].x_1^2 - 2a_1^2b^2\xi.\left[b^2.\xi^2 - a^2(a^2k-1).\eta^2\right].x_1$$
$$+ a_1^2.\left\{\left[b^2.\xi^2 - a^2(a^2k-1).\eta^2\right]^2 - a^4b_1^2.\eta^2\right\} = 0.$$

Werden in dieser in Bezug auf x_1 quadratischen Gleichung die von diesem Parameter unabhängigen Koefficienten bezüglich mit X_1; X_2 und X_3 bezeichnet, so kann man kürzer schreiben:

$$X_1.x_1^2 - 2X_2.x_1 + X_3 = 0.$$

Wächst nun x_1 um Δx_1, dann gilt für das neue $x_1 + \Delta x_1$ die folgende Gleichung:

$$X_1.(x_1+\Delta x_1)^2 - 2X_2.(x_1+\Delta x_1) + X_3 = 0.$$

Durch die Koexistenz beider Gleichungen oder — was dasselbe bedeutet — der Gleichungen:

$$\begin{cases} X_1.x_1^2 - 2X_2.x_1 + X_3 = 0, \\ 2(X_1.x_1 - X_2) + \Delta x_1.X_1 = 0 \end{cases}$$

sind die Schnittpunkte der beiden zu x_1 und $x_1+\Delta x_1$ gehörigen Kegelschnitte bestimmt. Für zwei unendlich benachbarte Kegelschnitte verschwindet Δx_1.

Von ihren Schnittpunkten ist, wie sich zeigen wird, nur einer veränderlich, wenn man zu weiteren Paaren unendlich benachbarter Kegelschnitte fortschreitet.

Er wird durch die Gleichungen

$$(64) \quad \begin{cases} K = X_1.x_1^2 - 2X_2.x_1 + X_3 = 0, \\ \dfrac{dK}{dx_1} = X_1.x_1 - X_2 = 0 \end{cases}$$

bestimmt und ist jedenfalls ein Punkt der gesuchten Enveloppe

Die Gleichung der letzteren wird daher aus den Gleichungen (64) durch Elimination des unbestimmten Parameters abgeleitet in der Form:

$$X_1 . X_3 - X_2^2 = 0.$$

Nach Restitution der Werte für die X und gehöriger Reduktion folgt:

(65) ... E: $\left[b^2 . \xi^2 - a^2 (a^2 k - 1) . \eta^2 \right]^2 = (b^4 a_1^2 . \xi^2 + a^4 b_1^2 . \eta^2)$,

eine Gleichung vierten Grades. Dasselbe Resultat ergiebt sich auch durch Auflösen von Gl. (64_1) nach x_1 und Gleichsetzung der beiden Wurzelwerte, in Analogie mit dem Verfahren zur Bestimmung der Enveloppe einer Geraden, deren Gleichung einen unbestimmten Parameter in der zweiten Potenz enthält.

Fall 2. Bewegt sich Punkt P_1 auf der Ellipse $S = 0$ selbst, ist also in Gl. (65) $\begin{matrix} a_1 = a, \\ b_1 = b \end{matrix}$ zu setzen, so folgt:

(66) ... E_s: $\left[b^2 . \xi^2 - a^2 (a^2 k - 1) . \eta^2 \right]^2 = a^2 b^2 (b^2 . \xi^2 + a^2 . \eta^2)$.

Fall 3. Beschreibt P_1 den Kreis $\varkappa \equiv x^2 + y^2 - r^2 = 0$, ist also $a_1 = b_1 = r$, dann entsteht:

(67) ... E_c: $\left[b^2 . \xi^2 - a^2 (a^2 k - 1) . \eta^2 \right]^2 = r^2 (b^4 . \xi^2 + a^4 . \eta^2)$.

Fall 4. Sind x_1 und y_1 durch die Hyperbelgleichung $\varkappa \equiv b_1^2 x^2 - a_1^2 y^2 - a_1^2 b_1^2 = 0$ verbunden, so ergiebt sich die Gleichung der Enveloppe:

(68) ... E_H: $\left[b^2 . \xi^2 - a^2 (a^2 k - 1) . \eta^2 \right]^2 = (b^4 \varkappa a_1^2 . \xi^2 - a^4 b_1^2 . \eta^2)$.

Fall 5. Für $\begin{matrix} a_1 = a \\ b_1 = b \end{matrix}$, also für den Fall, dass sich P_1 auf einer Hyperbel von denselben Axen wie die Ellipse $S = 0$ bewegt, geht die vorige Gleichung über in:

(69) ... E_{H_1}: $\left[b^2 . \xi^2 - a^2 (a^2 k - 1) . \eta^2 \right]^2 = a^2 b^2 (b^2 . \xi^2 - a^2 . \eta^2)$.

Fall 6 $a_1 = b_1 = r$; $x \equiv 0$ ist eine gleichseitige Hyperbel. Gl. (68) reduciert sich auf:

$$(70) \ldots E_{II_2}: \left[b^2 . \xi^2 - a^2 (a^2 k - 1) . \eta^2 \right]^2 = r^2 (b^4 . \xi^2 - a^4 . \eta^2).$$

Fall 7. Legt man endlich als Relation zwischen x_1 und y_1 die Gleichung einer Parabel in der gewöhnlichen Form: $x \equiv y^2 - p\,x = 0$ zu Grunde, so findet man leicht die Enveloppengleichung:

$$(71) \ldots E_P: \begin{cases} \left[b^2 . \xi^2 - a^2 (a^2 k - 1) . \eta^2 \right] + \dfrac{\eta^2}{\xi} . \dfrac{a^4 p}{4 b^2} = 0 \text{ oder} \\ 4 b^4 . \xi^3 - 4 a^2 b^2 (a^2 k - 1) . \xi \eta^2 + a^4 p . \eta^2 = 0, \end{cases}$$

also eine Gleichung dritten Grades.

Bei der Herleitung der Gleichung $E = 0$ für die Enveloppe haben wir von den 4 Schnittpunkten der beiden unendlich benachbarten Kegelschnitte vorerst nur einen als Punkt der Umhüllungskurve in's Auge gefasst. Es liegt demnach die Frage nach der Bedeutung der drei übrigen Punkte für die Enveloppe nahe. Um sie zunächst für den Fall 1 zu lösen, suchen wir direkt die 4 Simultanwurzeln des folgenden Gleichungssystems:

$$(72^\alpha) . K \equiv b^2 . \xi^2 - a^2 (a^2 k - 1) . \eta^2 - b^2 \xi . x_1 - a^2 \eta . \frac{b_1}{a_1} \sqrt{a_1^2 - x_1^2} = 0,$$

$$(72^\beta) . K \equiv b^2 . \xi^2 - a^2 (a^2 k - 1) . \eta^2 - b^2 \xi . (x_1 + \Delta x_1) - a^2 \eta . \frac{b_1}{a_1} \sqrt{a_1^2 - (x_1 + \Delta x_1)^2} = 0.$$

Das Resultat der Subtraktion beider Gleichungen, nach Δx_1 geordnet, ist, nachdem vorher durch Δx_1 dividiert und diese Grösse — da die Kegelschnitte unendlich nahe liegen sollen — gleich Null gesetzt worden, die Gleichung:

$$(73) \ldots M \equiv y . \left[b_1^2 a^2 x_1 . \eta - b^2 a_1^2 y_1 . \xi \right] = 0.$$

Der erste Faktor liefert eine Schnittpunktsordinate der beiden Kegelschnitte K und K_1: $\eta_1 = 0$; die zugehörige Abscisse findet sich ebenfalls $= 0$.

Der andere Faktor stellt die Sehne dar, welche den einen, mit dem Ursprung zusammenfallenden Schnittpunkt beider Kegelschnitte mit einem endlichen zweiten verbindet. Sie ist die einzige bestimmte Durchschnittssehne unter den 3 Linienpaaren durch die 4 Schnittpunkte von K und K_1. Aus Gl. (73) folgt $\eta_2 = \frac{b^2 a_1^2}{a^2 b_1^2} \cdot \frac{y_1}{x_1} \cdot \xi$. Durch Substitution dieses Wertes für η in die Gleichung $K \equiv 0$, erhält man die Koordinaten jenes zweiten Schnittpunktes, den wir jedoch mit IV. bezeichnen wollen. Die Indices der $x_1 y_1$ dürfen unterdrückt werden.

$$(74)\ldots\ \text{IV.}\begin{cases}\xi = \dfrac{a^4 b_1^4 a_1^2 . x}{b_1^4 a^4 . x^2 - b^2 a_1^4 a^2 (a^2 k - 1) . y^2} = \dfrac{a^2 a_1^2 b_1^4 . x}{b_1^4 a^2 . x^2 - b^2 (a^2 k - 1) a_1^4 . y^2}, \\ \eta = \dfrac{a^2 b^2 a_1^4 b_1^2 . y}{b_1^4 a^4 . x^2 - b^2 a_1^4 a^2 (a^2 k - 1) . y^2} = \dfrac{b^2 b_1^2 a_1^4 . y}{b_1^4 a^2 . x^2 - b^2 (a^2 k - 1) a_1^4 . y^2}.\end{cases}$$

Daneben hat man:

$$\text{I.}\ \begin{Bmatrix}\xi \\ \eta\end{Bmatrix} = 0 \text{ und}$$

$$\text{II.}\ \text{III.}\ \begin{Bmatrix}\xi \\ \eta\end{Bmatrix} \text{ unendlich,}$$

da von den vier Wurzeln des Systems zwei scheinbar wegfallen, die Koefficienten der höchsten Glieder in den Eliminationsgleichungen also gleich Null sein müssen. Die beiden letzten Wurzelwerte waren vorauszusehen, denn die Kegelschnitte (72$^\alpha$ und $^\beta$) sind (für beliebiges Δx_1) ähnlich und in ähnlicher Lage, weil die Glieder mit den höchsten Potenzen der Variabeln in beiden Gleichungen übereinstimmen. Hat in den Gleichungen (72$^\alpha$ und $^\beta$) k einen solchen Wert, dass sie Ellipsen darstellen, so sind die Koordinaten der Punkte II und III unendlich imaginär; für den speciellen Fall zweier Kreise hat man die unendlich fernen Kreispunkte.

Ist k so bestimmt, dass die Gleichungen (72) Parabeln repräsentieren, dann sind die Koordinaten zu II und III

unendlich und unter sich gleich, denn ähnlich und ähnlich liegende Parabeln berühren sich in ihren unendlich fernen Punkten.

Es kann nun noch leicht bestätigt werden, dass in der That der Kegelschnitt $K=0$ die Kurve $E=0$ in den 4 Punkten I, II, III, IV berührt. Wir kombinieren zu dem Ende die Gleichungen:

$$(75)\ldots \begin{cases} 1)\ldots \left[b^2.\xi^2 - a^2(a^2k-1).\eta^2\right]^2 - (b^4a_1^2.\xi^2 + a^4b_1^2.\eta^2) = 0, \\ 2)\ldots \left[b^2.\xi^2 - a^2(a^2k-1).\eta^2\right] - b^2x_1.\xi - a^2y_1.y = 0. \end{cases}$$

Ersetzt man den Klammerwert der ersten Gleichung aus der zweiten, so folgt:

$$\left[a_1^2b^2y_1.\xi - b_1^2a^2x_1.\eta\right]^2 = 0,$$

also wieder die Gleichung der Sehne $M=0$, aber als Doppelgerade, also auch Berührungsehne. Die zweimalige Substitution des Wertes $\eta = \frac{a_1^2b^2y_1}{a^2b_1^2x_1}.\xi$ in Gl. (75_2) oder die einmalige in Gl. (75_1). ergiebt:

$$(76)\ldots \text{I.} \begin{cases} \xi_1 = 0, \\ \xi_2 = 0. \end{cases} \quad \text{IV.} \begin{cases} \xi_1 = \dfrac{a^2a_1^2b_1^4.x}{b_1^4a^2.x^2 - b^2(a^2k-1)a_1^4.y^2}, \\ \xi_2 = \dfrac{a^2a_1^2b_1^4.x}{b_1^4a^2.x^2 - b^2(a^2k-1)a_1^4.y^2}. \end{cases}$$

Die zugehörigen Ordinatenwerte lauten:

$$(76^a)\ldots \text{I.} \begin{cases} \eta_1 = 0, \\ \eta_2 = 0. \end{cases} \quad \text{IV.} \begin{cases} \eta_1 = \dfrac{b^2b_1^2a_1^4.y}{b_1^4a^2.x^2 - b^2(a^2k-1)a_1^4.y^2}, \\ \eta_2 = \dfrac{b^2b_1^2a_1^4.y}{b_1^4a^2.x^2 - b^2(a^2k-1)a_1^4.y^2}. \end{cases}$$

Wollte man die Simultanlösungen des Gleichungssystems nach der Bézout'schen Methode oder nach dem Verfahren der fortgesetzten Division etc. berechnen, so würde man die Glieder in ξ^8, ξ^7, ξ^6, ξ^5 und η^8, η^7, η^6, η^5 mit dem Koefficienten 0 behaftet finden, so dass man hat:

$$\text{II.}\begin{Bmatrix}\xi_{1,2}\\ \eta_{1,2}\end{Bmatrix} = \text{unendlich reell oder imaginär.}$$
$$\text{III.}\begin{Bmatrix}\xi_{1,2}\\ \eta_{1,2}\end{Bmatrix}$$

Fallen die Punkte II und III zusammen, so berühren die Kegelschnitte die Kurve $E=0$ vierpunktig im Unendlichen. Im Allgemeinen aber berührt also jeder derKegelschnitte $K=0$ in den 4 Punkten I, II, III, IV die Kurve $E=0$ in zwei zusammenfallenden Punkten.

Für die Koordinaten von IV, welche mit x y variiren, während I, II und III für ein angenommenes k ein für allemal fest liegen, erhalten wir für besondere Werte von b_1 und a_1 folgende Ausdrücke:

Fall 2. $a_1 = a,$
$b_1 = b.$

$$(77)\ldots\begin{cases}\xi = \dfrac{a^2 b^2 . x}{b^2 . x^2 - a^2 (a^2 k - 1) . y^2},\\ \eta = \dfrac{a^2 b^2 . y}{b^2 . x^2 - a^2 (a^2 k - 1) . y^2}.\end{cases}$$

Fall 3. $a_1 = b_1 = r.$

$$(78)\ldots\begin{cases}\xi = \dfrac{a^2 r^2 . x}{a^2 . x^2 - b^2 (a^2 k - 1) . y^2},\\ \eta = \dfrac{b^2 r^2 . y}{a^2 . x^2 - b^2 (a^2 k - 1) . y^2}.\end{cases}$$

Fall 4. Stellt $x=0$ eine Hyperbel dar, dann ist das Gleichungspaar:

$$(79).\begin{cases}K \equiv b^2 . \xi^2 - a^2 (a^2 k - 1) . \eta^2 - b^2 \xi . x_1 - a^2 \eta . \dfrac{b_1}{a_1}\sqrt{x_1^2 - a_1^2} = 0,\\ K_1 \equiv b^2 . \xi^2 - a^2 (a^2 k - 1) . \eta^2 - b^2 \xi . (x_1 + \Delta x_1) - a^2 \eta . \dfrac{b_1}{a_1}\sqrt{(x_1 + \Delta x_1)^2 - a_1^2} = 0\end{cases}$$

aufzulösen. Man erhält ausser den ξ η für I, II, III, wegen $\eta = -\dfrac{a_1^2 b^2}{a^2 b_1^2} \cdot \dfrac{y_1}{x_1} \cdot \xi$ viertens:

$$(80)\quad \begin{cases} \xi = \dfrac{+\,b_1^4 a_1^2 a^4 . x}{b_1^4 a^4 . x^2 - a^2 (a^2 k - 1) a_1^4 b^2 . y^2} = \dfrac{+\,b_1^4 a_1^2 a^2 . x}{b_1^4 a^2 . x^2 - b^2 (a^2 k - 1) a_1^4 . y^2}, \\ \eta = \dfrac{-\,a_1^4 b_1^2 a^2 b^2 . y}{b_1^4 a^4 . x^2 - a^2 (a^2 k - 1) a_1^4 b^2 . y^2} = \dfrac{-\,a_1^4 b_1^2 b^2 . y}{b_1^4 a^2 . x^2 - b^2 (a^2 k - 1) a_1^4 . y^2}. \end{cases}$$

Insbesondere folgt:

Fall 5. $a_1 = a$, $b_1 = b$.

$$(81)\quad \begin{cases} \xi = \dfrac{+\,a^2 b^2 . x}{b^2 . x^2 - a^2 (a^2 k - 1) . y^2}, \\ \eta = \dfrac{-\,a^2 b^2 . y}{b^2 . x^2 - a^2 (a^2 k - 1) . y^2}. \end{cases}$$

Fall 6. $a_1 = b_1 = r$.

$$(82)\quad \begin{cases} \xi = \dfrac{+\,a^2 r^2 . x}{a^2 . x^2 - b^2 (a^2 k - 1) . y^2}, \\ \eta = \dfrac{-\,b^2 r^2 . y}{a^2 . x^2 - b^2 (a^2 k - 1) . y^2}. \end{cases}$$

Fall 7. $x = 0$ eine Parabel ($y^2 = px$). Durch Auflösen der entsprechenden Gleichungen erhält man zunächst für die Berührungssehne $\overline{\text{I. IV}}$:

$$(2 b^2 x_1 . \xi + a^2 y_1 . \eta)^2 = 0 \text{ oder } \eta = -2 \frac{b^2}{a^2} . \frac{x_1}{y_1} . \xi$$

und damit:

$$(83)\quad \begin{cases} \xi = \dfrac{-\,a^2 p . x}{a^2 p - 4 b^2 (a^2 k - 1) . x}, \\ \eta = \dfrac{+\,2 b^2 p . x}{a^2 p - 4 b^2 (a^2 k - 1) . x} . \dfrac{x}{y}. \end{cases}$$

Werden alle so gefundenen Ausdrücke für ξ_{IV} und η_{IV} umgekehrt in Bezug auf x und y aufgelöst, so ergeben sich die folgenden, den vorigen ganz analog gebauten Ausdrücke:

Fälle 1 und 4.

$$(84)\quad \begin{cases} x = \dfrac{\pm\, a_1^2 b^2 . \xi}{b^2 . \xi^2 - a^2 (a^2 k - 1) . \eta^2}, \\ y = \dfrac{\pm\, a^2 b_1^2 . \eta}{b^2 . \xi^2 - a^2 (a^2 k - 1) . \eta^2}. \end{cases}$$

Fälle 2 und 5.

$$(85)\ \ldots\ \begin{cases} x = \dfrac{\pm a^2 b^2 . \xi}{b^2 . \xi^2 - a^2 (a^2 k - 1) . \eta^2}, \\ y = \dfrac{\pm a^2 b^2 . \eta}{b^2 . \xi^2 - a^2 (a^2 k - 1) . \eta^2}. \end{cases}$$

Fälle 3 und 6.

$$(86)\ \ldots\ \begin{cases} x = \dfrac{\pm b^2 r^2 . \xi}{b^2 . \xi^2 - a^2 (a^2 k - 1) . \eta^2}, \\ y = \dfrac{\pm a^2 r^2 . \eta}{b^2 . \xi^2 - a^2 (a^2 k - 1) . \eta^2}. \end{cases}$$

Fall 7.

$$(87)\ \ldots\ \begin{cases} x = \dfrac{-a^2 p . \xi}{a^2 p - 4 b^2 (a^2 k - 1) . \xi^2}, \\ y = \dfrac{+2 b^2 p . \xi}{a^2 p - 4 b^2 (a^2 k - 1) . \xi^2} \cdot \dfrac{\xi}{\eta}. \end{cases}$$

Die Substitution dieser Werte für x und y in die Gleichung des betreffenden Kegelschnitts $\varkappa = 0$ führt wieder auf die Kurve $E = 0$ zurück und umgekehrt erzeugt die quadratische Substitution für ξ und η in $E = 0$ den Kegelschnitt $\varkappa = 0$.

Es ist also durch diese doppelten Relationen jedem Punkte $x\ y$ von $\varkappa = 0$ ein ganz bestimmter Punkt $\xi_{IV}\ \eta_{IV}$ von $E = 0$ zugewiesen und umgekehrt. Aber auch jedem, irgendwie mit $\varkappa = 0$ verbundenen Punkte oder sonstigen geometrischen Gebilde entspricht eine ganz bestimmte mit $E = 0$ in Verbindung stehende, ebene Figur. (Bei einer allgemeineren Formulierung der Voraussetzungen brauchen die Koordinatenaxen der beiden Korrelationssysteme nicht, wie es bei den unsrigen der Fall ist, zusammen zu fallen).

Setzt man z. B. irgend eine Gerade von der Gleichung: $y = mx + n$ im System der mit $\varkappa = 0$ verbundenen Punkte voraus, so erhält man als zugehörige Figur im System E_c einen mit $K = 0$ [Gl. (45)] ähnlichen und ähnlich liegenden Kegelschnitt, dessen Gleichung:

$$(88)\ldots b^2.\xi^2-a^2(a^2k-1).\eta^2+\frac{m}{n}.b^2r^2.\xi-\frac{1}{n}.a^2r^2.\eta=0$$

gefunden wird. Da m und n willkührliche Grössen sind, so erhellt:

Allen Geraden im System $\varkappa$ entsprechen im System E Kegelschnitte, welche durch 3 diesem System eigentümliche Punkte I; II; III gehen, also dem Dreieck derselben umschrieben sind.

In allen vorher aufgeführten Fällen sind diese 3 Punkte so beschaffen, dass die der Geraden zugewiesenen Kegelschnitte ähnlich und in ähnlicher Lage sind. Andererseits erhält man, wenn eine Gerade von der Gleichung $\eta=\mu\xi+\nu$ im System E_c gegeben ist, durch die quadratische Substitution für ξ, η die Gleichung eines Kegelschnitts:

$$(89)\ldots a^2.x^2-b^2(a^2k-1).y^2+\frac{\mu}{\nu}.a^2r^2.x-\frac{1}{\nu}.b^2r^2.y=0,$$

welcher ebenfalls durch 3 feste Punkte I'; II'; III' des Systems $\varkappa$ geht, also dem Dreieck derselben umschrieben ist. Die Punkte I'; II'; III' fallen bei unseren Voraussetzungen mit den Punkten I; II; III des Systems E zusammen; im Allgemeinen wird dies natürlich nicht der Fall sein.

Erzeugt nun Punkt x y oder die Gerade $y=mx+n$ im System $\varkappa$ irgend ein geometrisches Gebilde, so wird der entsprechende Punkt ξ η, bezw: Kegelschnitt im System E die entsprechende Figur beschreiben.

Bestimmen wir speciell m und n so, dass die Gerade zur Tangente des Kegelschnitts $\varkappa\equiv x^2+y^2-r^2=0$ im Punkte x_1 y_1, dass also $\left\{\begin{matrix} m=-\frac{x_1}{y_1} \\ n=+\frac{r^2}{y_1} \end{matrix}\right\}$ wird, so geht die Gleichung des entsprechendenden Kegelschnitts im System E in Gl. (45) über, worin x_1 und y_1 durch obige Kreisgleichung verbunden sind. D. h. aber:

Umhüllt die Gerade im System x den Kegelschnitt $x=0$, so umhüllt der entsprechende Kegelschnitt $K=0$ im System E die Kurve $E=0$.

Analog würde der den Transformationsausdrücken direkt zu entnehmende Satz für entsprechende Punkte beider Systeme lauten:

Bewegt sich Punkt $x\ y$ im System x auf dem Kegelschnitt $x=0$, so beschreibt der entsprechende Punkt $\xi\ \eta$ im System E die Kurve $E=0$.

Wie den Punkten, die im System x auf einer Geraden liegen, im andern System Punkte auf einem Kegelschnitt durch die 3 Punkte I; II; III zugewiesen sind, so findet man auch:

Es entsprechen den Geraden im einen System, die durch einen Punkt s gehen (oder dem Strahlbüschel s) Kegelschnitte des andern, die durch I; II; III und den vierten, dem Scheitel s des Strahlbüschels zugewiesenen Punkt IV hindurchgehen, d. h. *ein Kegelschnittbüschel im zweiten System bilden.*

Ebenso evident ist die Umkehrung des Satzes in Folge der Gegenseitigkeit des Entsprechens in beiden Systemen. — Es würde leicht sein, auf Grund der durch unsere obigen Relationen zwischen den Figuren der beiden Systeme begründeten Verwandtschaften noch weitere Sätze auszusprechen und solche, die von Punkten, Geraden und Kegelschnitten etc. des einen gelten, auf die ihnen entsprechenden Figuren im anderen zu übertragen: Dieselben können indessen in umfassenderer Gestalt erhalten werden, wenn wir von unseren Ausdrücken fortschreiten zu den Grundgleichungen der allgemeinen Verwandtschaft, als deren Specialfälle sich unsere Systeme des Entsprechens sofort erkennen lassen.

In den Relationen *(S. F. art. 400)*:

$$(90)\ \ldots\ \begin{cases} x = \dfrac{A_2 B_3 - A_3 B_2}{A_1 B_2 - A_2 B_1}, \\ y = \dfrac{A_3 B_1 - A_1 B_3}{A_1 B_2 - A_2 B_1} \end{cases}$$

und ebenso in den durch Auflösen nach ξ und η hieraus abgeleiteten:

$$(91) \ldots \begin{cases} \xi = \dfrac{\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_3 - \mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_2}{\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_2 - \mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_1}, \\ \eta = \dfrac{\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_1 - \mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_3}{\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_2 - \mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_1}, \end{cases}$$

in denen A und B lineare Funktionen von ξ und η, $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ ebensolche von x und y bedeuten, können in der That die Koefficienten der Variabeln in A und B resp: $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ so bestimmt werden, dass diese allgemeinen Grundgleichungen in die specielleren, von uns gefundenen, übergehen. —

Die Punkte I; II; III und I′; II′; III′ sind die Haupt- oder Kardinalpunkte ($\mathfrak{x}$; $\mathfrak{z}$; $\mathfrak{t}$ und $\mathfrak{z}_1$; $\mathfrak{y}_1$; $\mathfrak{x}_1$) der von Steiner und Magnus gleichzeitig aufgestellten und von Ersterem als Entsprechen von Punkten in Bezug auf ein Kegelschnittbüschel begründeten allgemeinen Verwandtschaft; d. h. sie sind die Eckpunkte des gemeinsamen Diagonaldreiecks oder Tripels der beiden Polarsysteme ($\varkappa$ und E). Die eine Seite des Diagonaldreiecks ist in unseren Specialfällen die unendlich ferne Gerade der Ebene (,wodurch die Benutzung Cartesischer Koordinaten von selbst angezeigt ist).

Die Kurve IV. Ordnung $E = 0$, welche zu dem Kegelschnitt $\varkappa = 0$ im Verhältnis der besprochenen Verwandtschaften steht, besitzt in den 3 Hauptpunkten je einen Doppelpunkt, wie man nach bekannten Regeln mit Hilfe zweimaliger Differentiation der betreffenden Gleichung bestätigen kann.

In der allgemeinen Steiner'schen Verwandtschaft entspricht einer Kurve $n.O$ eine Kurve von der Ordnung $2n$, welche in jedem der 3 Hauptpunkte einen n-fachen Punkt besitzt. *(Durège, Kurven III. O, p. 125).*

Wenn man in Bezug auf den festen Kegelschnitt $S=0$ (,den Hilfskegelschnitt oder die Direktrix) zu jedem Punkt des Kegelschnitts $\varkappa = 0$ die Polare p bildet, so

ist die Enveloppe dieser Polaren wiederum ein Kegelschnitt $E=0$. *Beide Kegelschnitte* ($x=0$ *und* $E=0$) *stehen zu einander in der Beziehung der Polarreciprocität.*

Die Polare p aber ist nichts anderes als der Ort der Schnitt- oder Mittelpunkte sämmtlicher in den Sehnen $L=0$ berührenden Tangentenpaare. Da aber das Tangentenpaar in den Schnittpunkten einer Sehne mit (der Ellipse) $S=0$ als specieller Fall eines in denselben Punkten doppelt berührenden Kegelschnitts angesehen werden kann, so stellt sich die im vorliegenden Abschnitt gelöste Aufgabe als eine Verallgemeinerung des polarreciproken Beziehens dar. Dass sich die Reciprocität, wenn man von den Grundgleichungen jener allgemeineren Verwandtschaft ausgeht, als specieller Fall der letzteren erweist, findet sich ausserdem bei *S-F. art. 400*, Anmerk. angedeutet.

Als allgemeines Resultat der Betrachtungen in diesem Abschnitt ergab sich Folgendes:

Wenn man in Bezug auf den festen Kegelschnitt $S=0$ (,im Vorstehenden die Ellipse $b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2=0$) *zu jedem Punkte eines anderen Kegelschnitts* $x=0$ *den dritten Kegelschnitt* $K=0$ *(als Mittelpunktskurve aller* $S=0$ *in einem Sehnenbüschel doppelt berührenden Kegelschnitte) für ein bestimmtes* k *sucht, so ist die Enveloppe dieser letzteren Kegelschnitte* ($K=0$) *im Allgemeinen eine Kurve IV.O:* $E=0$. $x=0$ *und* $E=0$ *stehen in der Beziehung der oben betrachteten Verwandtschaften.*

Der feste Kegelschnitt $S=0$ soll auch hier Hilfskegelschnitt oder Direktrix heissen.

Wir sehen also:

Wie sich die Verwandtschaft der Reciprocität zweier Systeme unter Benutzung eines Hilfskegelschnitts durch die Theorie der reciproken Polaren begründen lässt: so kann auch jene allgemeinere Verwandtschaft — welche algebraisch durch eine quadratische

Substitution hergestellt ist — durch eine analoge Methode mittelst eines Hilfskegelschnitts etabliert werden.

Durch beliebige Wahl des letzteren und des veränderlichen Parameters k ist das Verfahren einer beträchtlichen Mannigfaltigkeit fähig.

Die Gleichung der Polarreciproken zu $x = 0$ in Bezug auf $S = 0$ wird, z. B. für $x \equiv x^2 + y^2 - r^2 = 0$, gefunden:

$$(92) \ldots E \equiv b^4 \xi^2 + a^4 \eta^2 - \frac{a^4 b^4}{r^2} = 0.$$

Von den beiden Kegelschnitten $x = 0$, $E = 0$ geht einer aus dem andern hervor durch die linearen Substitutionen:

$$(93) \ldots \alpha. \begin{cases} x = \frac{r^2}{a^2} \cdot \xi, \\ y = \frac{r^2}{b^2} \cdot \eta \end{cases} \text{ und } \beta. \begin{cases} \xi = \frac{a^2}{r^2} \cdot x, \\ \eta = \frac{b^2}{r^2} \cdot y. \end{cases}$$

Beide Gleichungssysteme, wodurch eine ganz specielle reciproke Verwandtschaft begründet ist, können auch ersetzt werden durch eine einzige Relation, die sich durch Specialisierung der Konstanten aus der allgemeinen Reciprocitätsgleichung ableiten lässt.

Diese Relation ist die Gleichung:

$$(94) \ldots b^2 . \xi x + a^2 . \eta y - a^2 b^2 = 0.$$

Denn betrachtet man darin x_1 und y_1 als konstant, so stellt sie die Polare des Punktes $x\ y$ im andern System in Bezug auf $S = 0$ dar; im System der $x\ y$ aber entspricht die durch sie dargestellte Gerade dem Punkt $\xi_1\ \eta_1$ und ist also dessen Polare in Bezug auf dieselbe Direktrix.

Diese Betrachtung lässt sich mit Hilfe der Korrelationen (93) etwas genauer ausführen wie folgt:

Die Gleichung der Tangente im Punkt $\xi_1\ \eta_1$ von $E = 0$, nämlich:

$$(95) \ldots b^4 \xi \xi_1 + a^4 \eta \eta_1 - \frac{a^4 b^4}{r^2} = 0$$

kann nach Multiplikation mit $\frac{r^2}{a^2 b^2}$ geschrieben werden:

$$(95^\alpha) \ldots b^2 . \xi . \left(\frac{r^2 \xi_1}{a^2}\right) + a^2 . \eta . \left(\frac{r^2 y_1}{b^2}\right) - a^2 b^2 = 0,$$

oder, wenn man für die Koordinaten des Punktes ξ_1 η_1 mit Hilfe der Relationen (93^α) diejenigen des entsprechenden Punktes im System x y einführt:

$$(95^\beta) \ldots b^2 . \xi x + a^2 . \eta y - a^2 b^2 = 0.$$

Diese Gleichung repräsentiert in diesem Sinn die Polare zu x_1 y_1 in Bezug auf $S = 0$. (ξ, η sind laufende Koordinaten).

Andererseits lässt sich die Gleichung der Tangente im Punkt x_1 y_1 von $\varkappa = 0$, nämlich:

$$(96) \ldots x x_1 + y y_1 - r^2 = 0$$

nach Multiplikation mit $\frac{a^2 b^2}{r^2}$ schreiben:

$$(96^\alpha) \ldots b^2 . x . \left(\frac{a^2 x_1}{r^2}\right) + a^2 . y . \left(\frac{b^2 y_1}{r^2}\right) - a^2 b^2 = 0,$$

oder mit Rücksicht auf die Relationen (93^β):

$$(96^\beta) \ldots b^2 . x . \xi + a^2 . y \eta - a^2 b^2 = 0.$$

In diesem Sinne bedeutet sie die Gleichung der Polare von ξ_1 η_1 in Bezug auf $S = 0$, wo x, y die laufenden Koordinaten sind. —

Von den zahlreichen Specialformen, welche unsere Ausdrücke für die Transformation der beiden Systeme annehmen können, seien in aller Kürze nur die wenigen folgenden erwähnt:

1. $k = \frac{c^2}{a^4}$.

Der Kegelschnitt im System E, welcher einer Tangente an $\varkappa = 0$ im System der x y entspricht, ist, welcher Art auch der letztere Kegelschnitt sei, ein Kreis. Seine allgemeine Gleichung ist die Gl. (48). Einer beliebigen Geraden in $\varkappa$ ent-

spricht gleichfalls ein Kreis durch I; II; III. Die Transformation wird für die Fälle 1 und 4 bewirkt durch:

$$x = \pm \frac{a^2{}_1 . \xi}{\xi^2 + \eta^2},$$
$$y = \pm \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{b_1{}^2 . \eta}{(\xi^2 + \eta^2)}.$$

Der Hauptpunkt I ist, wie immer, der Ursprung der Koordinaten; die Punkte II und III, für beide Systeme — wie auch Punkt I — natürlich dieselben, sind die unendlich fernen imaginären Kreispunkte. Da wir wissen, dass II und III auf der unendlich fernen Geraden liegen, so brauchen wir nur x und y, resp: im anderen System ξ und $\eta = \infty$ zu setzen. Es folgt: $\xi^2 + \eta^2 = 0$.

Dem Kreis $x^2 + y^2 - r^2 = 0$ im System x entspricht im anderen System die Kurve IV.0:

$$(\xi^2 + \eta^2)^2 = \frac{b^4 a_1{}^2 . \xi^2 + a^4 b_1{}^2 . \eta^2}{r^2 b^4}.$$

Im Fall 7 ist mit Hilfe der Formeln:

$$x = \frac{-a^4 p . \xi}{a^4 p + 4 b^4 . \xi},$$
$$y = \frac{+2 a^2 b^2 p . \xi}{a^4 p + 4 b^4 . \xi} \cdot \frac{\xi}{\eta}$$

zu transformieren.

Einer Geraden entspricht ein Kegelschnitt, welcher verschiedener Gattung sein kann; der Parabel: $y^2 + p x = 0$ im System der x y ist die Kurve III.0 von der Gleichung:

$$4 b^4 . \xi (\xi^2 + \eta^2) - a^4 p . \eta^2 = 0$$

zugewiesen, welche eine Cissoide darstellt.

u. s. f.

2. $k = \frac{c_1{}^2}{a^4}$.

Die Kegelschnitte, welche von E umhüllt werden, sind gleichseitige Hyperbeln. Die Transformation wird in den Fällen 1 und 4 vollzogen durch:

$$x = \pm \frac{a_1^2 . \xi}{\xi^2 - \eta^2},$$

$$y = \pm \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{b_1^2 . \eta}{(\xi^2 - \eta^2)}.$$

Die Hauptpunkte II und III liegen auf den Geraden der Gleichung: $\xi^2 - \eta^2 = 0$ und sind also die reellen unendlich fernen Hyperbelpunkte.

Statt der Cissoide für $y^2 + p\,x = 0$ entspricht hier die Kurve:

$$4\,b^4 . \xi(\xi^2 - \eta^2) - a^4 p\,.\,\eta^2 = 0$$

jener Parabel.

$$3.\quad k = \frac{1}{a^2}.$$

Die Transformationsformeln reducieren sich im Falle 7 auf

$$x = -\xi,$$

$$y = +\frac{2\,b^2}{a^2} \cdot \frac{\xi^2}{\eta}$$

und liefern z. B. für gewisse Parabeln im System der $x\ y$ semikubische oder Neil'sche Parabeln im anderen System.

$$ad\ 1.\quad \left(k = \frac{c^2}{a^4}\right)$$

ist noch zu bemerken, dass der gleichseitigen Hyperbel $x^2 - y^2 = r^2$ im System $\varkappa$ die Kurve IV. 0, deren Gleichung:

$$(\xi^2 + \eta^2)^2 - \frac{b^4 a_1^4 . \xi^2 - a^4 b_1^4 . \eta^2}{r^2 b^4} = 0,$$

im System E entspricht, welche für $a = a_1 = b = b_1 = r$, in die Lemniskate:

$$(\xi^2 + \eta^2)^2 - r^2 (\xi^2 - \eta^2) = 0$$

übergeht.

u. s. f.

Man kann nun auch noch nach dem Ort der Centra der durch Gl. (45) dargestellten Kegelschnitte fragen, welcher entsteht, wenn sich P_1 auf dem Kegelschnitt $x=0$ bewegt.

Man findet beispielsweise für den Fall, dass

$$x \equiv b^2 x^2 + a^2 y^2 - a^2 b^2,$$

d. h. dass der Punkt P_1 die gegebene Ellipse $S=0$ selbst durchläuft, zunächst wegen:

$$b^2 . \xi^2 - a^2 (a^2 k - 1) . \eta^2 + b^2 \xi . x_1 - a b \eta . \sqrt{a^2 - x_1^2} = 0,$$

die Koordinaten eines für ein gegebenes x_1 bestimmten Mittelpunktes:

$$\begin{cases} \xi' = \dfrac{x_1}{2}, \\ \eta' = \dfrac{-\, b \sqrt{a^2 - x_1^2}}{2 a (a^2 k - 1)}. \end{cases}$$

Der Ort aller Mittelpunkte wird also durch Elimination von x_1 aus beiden Ausdrücken gefunden. Man erhält:

$$b^2 . \xi^2 + a^2 (a^2 k - 1)^2 . \eta^2 - \frac{a^2 b^2}{4} = 0,$$

also die Gleichung einer Ellipse, deren Axen sich berechnen:

$$A = \frac{a}{4},$$

$$B = \frac{b}{4 (a^2 k - 1)}.$$

u. s. f.

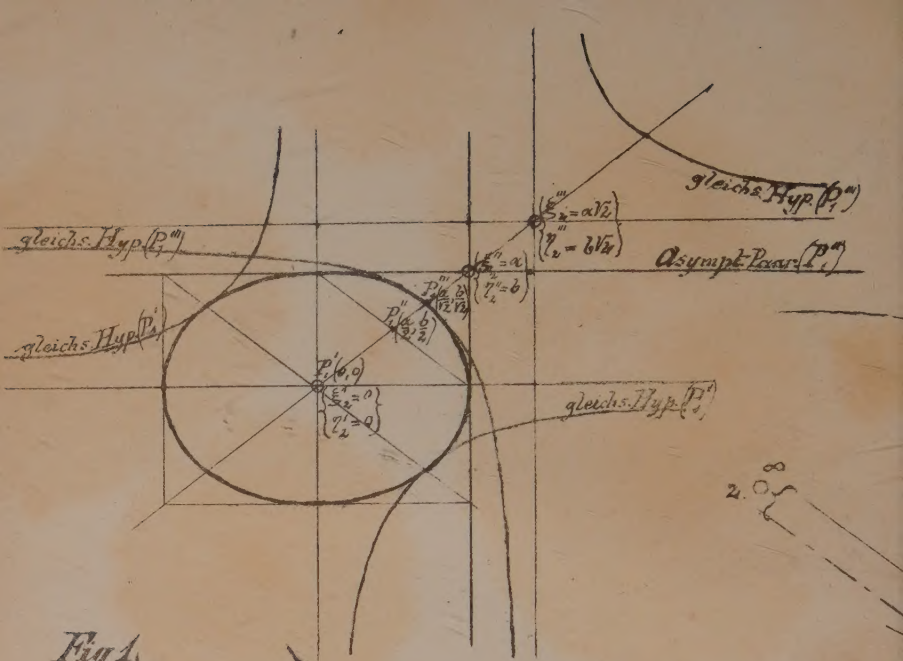
gleichs. Hyp. (P₁''')
gleichs. Hyp. (P₂''')
Asympt-Paar (P₄''')
gleichs. Hyp. (P₃')
gleichs. Hyp. (P₄')
gleichs. Hyp. (P₁')

Fig 1.

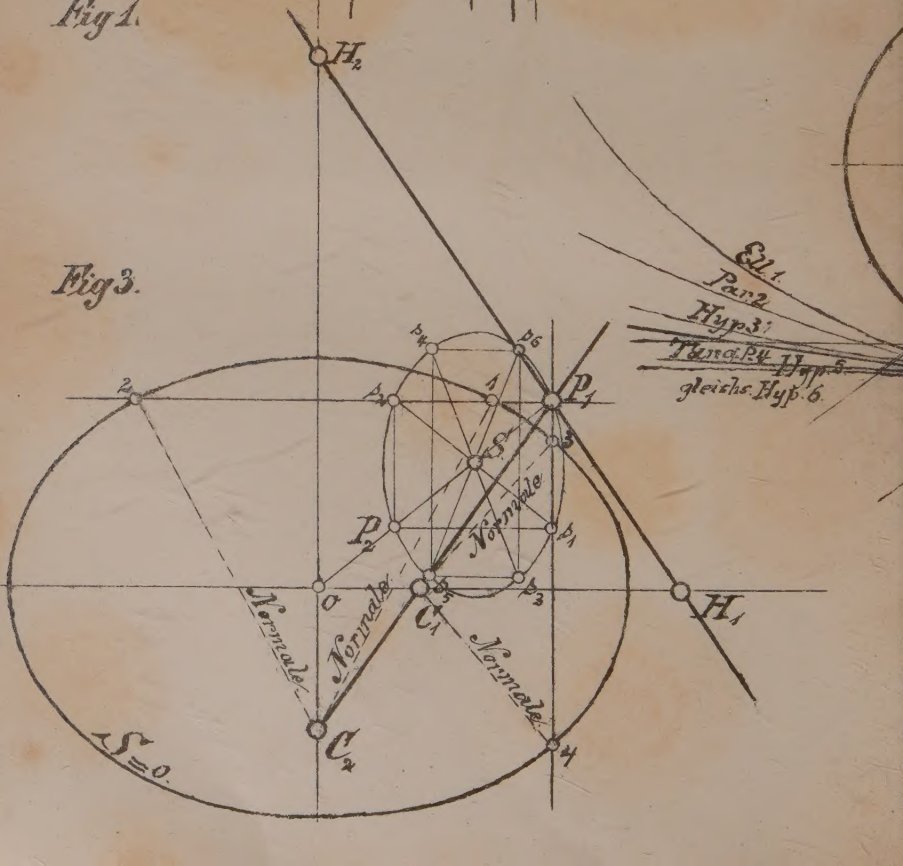
Ell. 1
Par. 2
Hyp. 3
Hyp. 4
Hyp. 5
gleichs. Hyp. 6
Normale
Normale
Normale
Normale
S = 0

Fig 3.

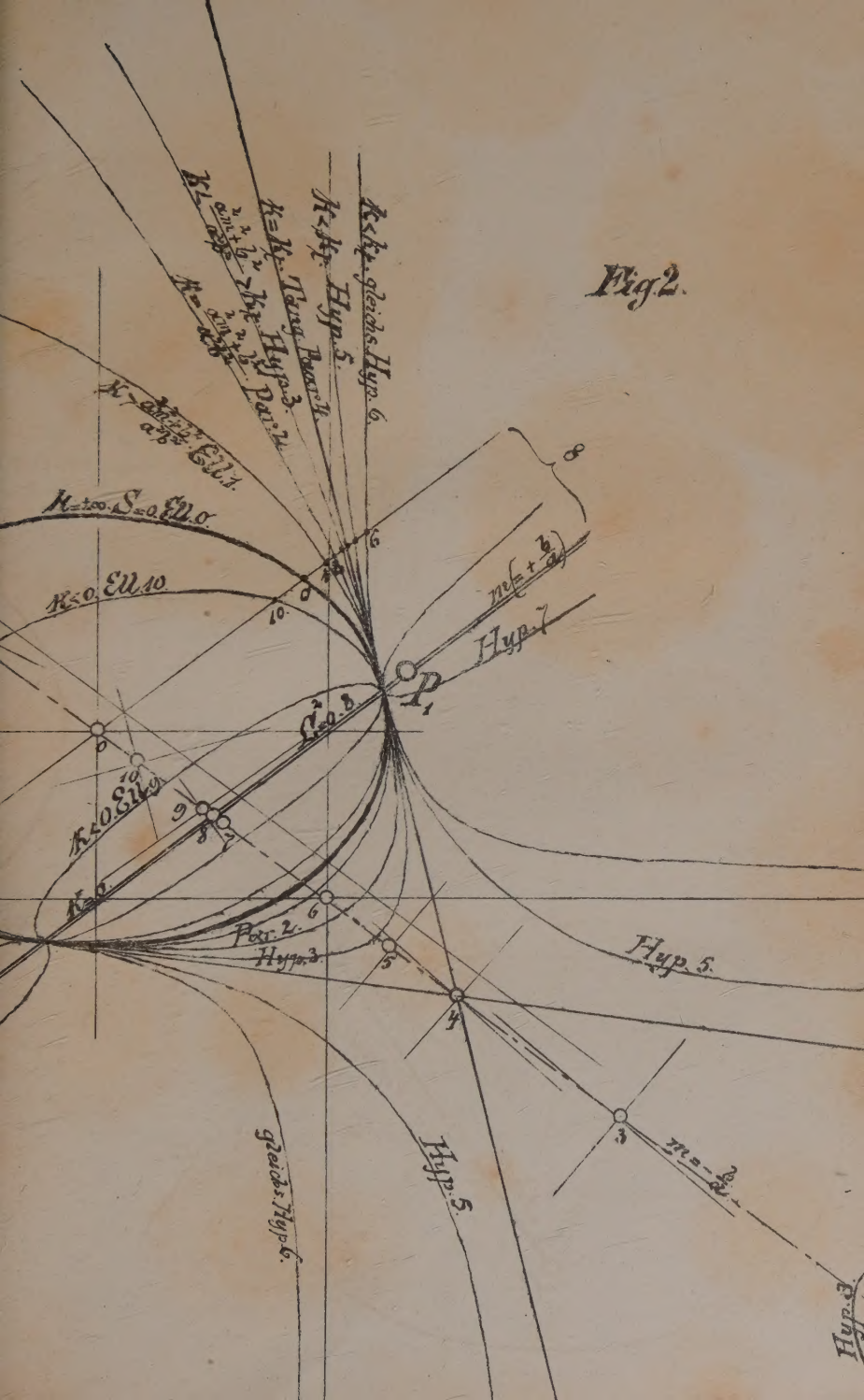
Fig. 2.
K<Kr. gleichs. Hyp. 6.
K<Kr. Hyp. 5.
K=Kr. Tang. Paar. 4.
K>Kr. Hyp. 3.
K=∞. S=0. Ell. 0.
K<0. Ell. 10.
Hyp. 7
P1
Par. 2.
Hyp. 3.
Hyp. 5.
gleichs. Hyp. 6.
Hyp. 5.
Hyp. 3.